

П.А. СТЕПИН

539/031
379

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

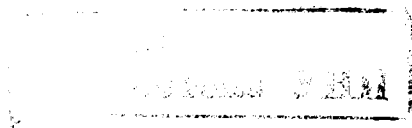
Издание восьмое

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
немашиностроительных специальностей
вузов



МОСКВА
„ВЫСШАЯ ШКОЛА“
1988

ББК 30.121
С79
УДК 539.38



Степин П. А.

С 79 Сопротивление материалов: Учеб. для немашиностроит. спец. вузов.— 8-е изд.— М.: Высш. шк., 1988.— 367 с.: ил.

В учебнике изложены основы сопротивления материалов в соответствии с программой курса в объеме 80—120 часов. Рассмотрен новый графоаналитический способ определения перемещений при изгибе.

В 8-е издание (7-е — в 1983 г.) внесены небольшие изменения редакционного характера.

Обозначения приняты в соответствии с международными рекомендациями ИСО и стандартом СЭВ 1565—79.

Учебник может быть использован учащимися техникумов.

С 2105000000(4309000000)—086 167—87
001(01)—88

ББК 30.121
605

© Издательство «Высшая школа», 1979
© Издательство «Высшая школа», 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решениями XXVII съезда КПСС предусмотрено всемерное ускорение научно-технического прогресса, более полное использование материалосберегающей техники и технологии производства, более широкое применение новых материалов: синтетических, композиционных и др.

Создание легких и надежных конструкций возможно лишь на базе глубокого изучения общетехнических дисциплин. Среди таких дисциплин важное место принадлежит общинженерной дисциплине, называемой «Сопротивление материалов».

Во многих высших учебных заведениях, в том числе в горно-металлургических, инженерно-экономических, химико-технологических, электромашиностроительных и др., курс сопротивления материалов изучается по сокращенной программе, рассчитанной на 80—120 часов.

При такой программе целесообразно иметь краткий учебник, в котором содержался бы основной материал изучаемой дисциплины.

Настоящий курс, написанный в соответствии с программой для указанных выше специальностей, имеет целью восполнить недостаток в кратких руководствах по сопротивлению материалов.

Основные вопросы курса иллюстрированы примерами, однако число их невелико и они несложны. Имеется в виду, что студенты параллельно с изучением теоретического материала посещают практические занятия, на которых приобретают навыки и в решении более сложных задач, а также выполняют домашние задания, пользуясь специальными руководствами.

В учебнике изложен простой и весьма эффективный способ определения перемещений при изгибе.

Для студентов, одновременно изучающих сопротивление материалов и иностранные языки, полезно рекомендовать данный учебник, изданный на английском, арабском, испанском и французском языках, а также на армянском и эстонском.

Автор выражает благодарность преподавателям кафедры сопротивления материалов Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе за полезные замечания по рукописи учебника и особенно д-ру техн. наук, проф. **И. И. Трапезину**, канд. техн. наук, доц. **В. Ф. Караванову**, доц. **М. Н. Михайлову**.

Автор

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. ЗАДАЧИ КУРСА

Различные сооружения и машины, проектированием и строительством которых занимается инженер в своей практической деятельности, помимо других качеств должны обязательно обладать прочностью, т. е. способностью сопротивляться разрушению под действием приложенных к ним внешних сил (нагрузок).

Для этого элементы (детали) сооружений и машин должны быть изготовлены из соответствующего материала и иметь необходимые размеры.

Изложение методов расчета элементов конструкций на прочность и составляет первую задачу курса сопротивления материалов.

Во многих случаях приходится определять те изменения формы и размеров (деформации), которые возникают в элементах конструкций при действии нагрузок.

Дело в том, что абсолютно твердых, недеформирующихся тел, которые изучаются в теоретической механике, в действительности не существует. Конечно, деформации, возникающие при действии обычных эксплуатационных нагрузок, невелики, и их можно обнаружить лишь с помощью специальных приборов (тензометров).

Небольшие деформации не оказывают существенного влияния на законы равновесия и движения тела, вследствие чего в теоретической механике ими пренебрегают. Однако без изучения этих деформаций невозможно решить очень важную для практики задачу, при каких условиях может произойти разрушение детали и, наоборот, при каких условиях деталь может безопасно работать.

Иногда величину деформаций, несмотря на их малость по сравнению с размерами самой детали, приходится ограничивать, так как в противном случае нормальная эксплуатация конструкции может стать невозможной. Например, при механической обработке детали на станке вследствие деформации самой детали и элементов станка может произойти снижение точности обработки, что недопустимо.

Способность элемента конструкции сопротивляться деформации называется **жесткостью**.

Отсюда **вторая задача** курса: изложение методов расчета элементов конструкций на жесткость.

Третья задача сопротивления материалов связана с изучением **устойчивости форм** равновесия реальных (т. е. деформирующихся) тел.

Под **устойчивостью** понимают **способность элемента сопротивляться возникновению больших отклонений от невозмущенного равновесия при малых возмущающих воздействиях**.

В качестве возмущающего воздействия можно, разумеется, принять малое изменение нагрузки.

Поэтому понятие устойчивости может быть сформулировано также следующим образом.

Равновесие элемента **устойчиво**, если малому изменению нагрузки соответствует малое изменение деформаций.

Наоборот, равновесие **неустойчиво**, если ограниченный рост нагрузки сопровождается теоретически неограниченным ростом деформаций. Практически стержень, после потери устойчивости, разрушится от чрезмерных напряжений.

Признаком **потери устойчивости** является также **внезапная смена одной формы равновесия другой**.

В качестве примера приведем случай сжатия тонкого элемента силой, действующей вдоль его оси. До какого-то определенного (критического) значения сжимающей силы, зависящего от материала, размеров и условий закрепления элемента, он устойчиво сохраняет прямолинейную форму.

При достижении же силой критического значения наряду с прямолинейной становится возможной и искривленная форма равновесия, более опасная для элемента.

Потеря устойчивости может иметь место при значениях нагрузок, совершенно безопасных с точки зрения прочности или жесткости элемента.

При выполнении указанных видов расчета необходимо стремиться к максимальной **экономии материалов**, т. е. к достаточным, но не завышенным размерам деталей машин и сооружений. Очевидно, что для этого необходимо возможно более полное и глубокое изучение свойств применяемых материалов и характера действующих на рассчитываемую деталь нагрузок. Это достигается всесторонними экспериментальными исследованиями и внимательным изучением накопленного опыта проектирования и эксплуатации конструкций.

С другой стороны, при выводе основных расчетных зависимостей сопротивления материалов приходится вводить различные гипотезы и упрощающие допущения. Справедливость этих гипо-

тез и допущений, а также степень погрешности, вносимой ими в расчетные формулы, проверяется путем сравнения результатов расчета по этим формулам с экспериментальными данными.

Конструкции, с которыми инженеру приходится встречаться на практике, имеют в большинстве случаев сложную форму, отдельные элементы которой можно свести к следующим простейшим типам:

1. **Брус** — тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим (рис. 1.1, а). В частном случае брус может иметь постоянную площадь поперечного сечения и прямолинейную ось.

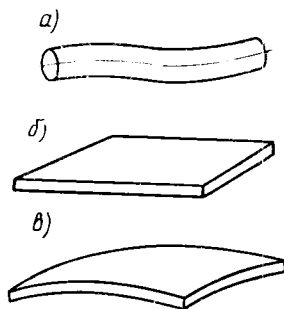


Рис. 1.1

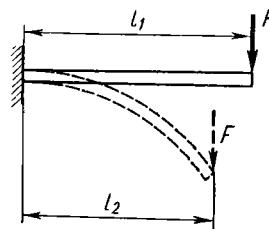


Рис. 1.2

Брус с прямолинейной осью называют **стержнем**.

Ось бруса — это линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений.

Плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его **поперечным сечением**.

2. **Пластинка** — тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами (рис. 1.1, б).

3. **Оболочка** — тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами (рис. 1.1, в).

4. **Массив** — тело, у которого все три размера одного порядка. В курсе «Сопроотивление материалов» рассматриваются преимущественно тела, имеющие форму брусьев постоянного сечения, и простейшие системы, состоящие из них. При этом имеются в виду брусья, обладающие достаточной жесткостью, т. е. не претерпевающие значительных деформаций при нагрузке.

В очень же гибких стержнях (рис. 1.2) возникают столь значительные деформации, что с этим нельзя не считаться даже

при определении опорных реакций. Определение же нового состояния I_2 , значительно отличающегося от первоначального I_1 , представляет собой довольно сложную задачу.

Методы расчета гибких брусьев, пластинок, оболочек и массивных тел рассматриваются в курсе «Прикладная теория упругости», свободном от тех упрощающих гипотез, которые вводятся в курсе «Сопротивление материалов». Методы теории упругости позволяют получить как точные решения задач, рассматривающихся в курсе «Сопротивление материалов», так и решения более сложных задач, где нельзя высказать приемлемые упрощающие гипотезы.

Способы расчета стержневых систем изучаются в курсе «Строительная механика».

Развитие науки о сопротивлении материалов, равно как и перечисленных смежных дисциплин, неразрывно связано с развитием техники.

Зарождение науки о сопротивлении материалов относится к XVII в. и связано с работами Галилея. Значительный вклад в развитие науки о сопротивлении материалов и теории упругости сделан выдающимися учеными **Гуком**, **Бернулли**, **Сен-Венаном**, **Коши**, **Ламэ** и др., которые сформулировали основные гипотезы и дали некоторые расчетные уравнения.

Особо следует отметить замечательные исследования (XVIII в.) знаменитого ученого **Л. Эйлера**, члена Петербургской Академии наук. Его работа, посвященная расчету сжатых стержней на устойчивость, широко используется и в настоящее время.

В XIX в. мировую известность приобретают работы русских ученых **Д. И. Журавского**, **Х. С. Головина** и др. Формулой Журавского для определения касательных напряжений при изгибе пользуются и поныне.

Важные и интересные исследования по расчету сжатых стержней на устойчивость, не потерявшие значения и до настоящего времени, выполнены в конце XIX в. **Ф. С. Ясинским**.

С начала XX в. роль русских ученых в науке о сопротивлении материалов еще более возрастает. Появляются замечательные работы проф. **И. Г. Бубнова**, акад. **А. Н. Крылова** и др., посвященные дальнейшему развитию и совершенствованию методов сопротивления материалов. Метод Бубнова для решения сложных задач сопротивления материалов пользуется мировой известностью.

Весьма большой вклад в развитие «Сопротивления материалов» внес **С. П. Тимошенко**, автор первоклассных учебников и многочисленных научных работ по вопросам расчета сооружений на прочность, устойчивость и колебания.

В нашей стране создана большая сеть научно-исследовательских институтов, работающих в области расчета конструкций. Работниками этих институтов наряду с работниками высшей школы решено много важных для развития новой техники задач, созданы новые эффективные методы расчета деталей сложной формы, находящихся под воздействием различных нагрузок.

Здесь следует упомянуть работы акад. **Н. Н. Давиденкова** по теориям прочности, работы акад. **С. В. Серенсена** по изучению прочности деталей при переменных нагрузках, акад. **А. Н. Динника** — по устойчивости, и др.

Особо следует отметить выдающиеся работы проф. **В. З. Власова** по расчету тонкостенных стержней и оболочек, имеющих широкое применение в современной технике.

Важные исследования выполнены **Ю. Н. Работновым**, **А. А. Ильюшиным**, **Э. И. Григолюком**, **В. В. Болотиним**, **А. Ф. Смирновым**, **В. И. Феодосьевым**, **Н. И. Безуховым**, **А. Р. Ржаницыным**, **С. Д. Пономаревым**, **И. И. Трапезиним** и другими советскими учеными.

§ 2. ДОПУЩЕНИЯ

Из-за сложности задачи расчета элементов конструкций в сопротивлении материалов принимаются некоторые упрощающие допущения относительно свойств материала, нагрузок и характера взаимодействия детали и нагрузок.

Экспериментальная проверка расчетных зависимостей, полученных на основе приведенных ниже допущений, показала, что погрешность, вносимая ими, очень незначительна и для практических целей ею можно пренебречь.

1-е допущение. Материал тела имеет сплошное (непрерывное) **строение**. Таким образом, здесь не принимается во внимание дискретная, атомистическая структура вещества. Это допущение вполне оправдано с практической точки зрения, так как большинство строительных материалов имеет настолько мелкозернистую структуру, что без заметной погрешности можно считать их строение сплошным, непрерывным. Даже для таких материалов, как дерево, бетон и камень, расчеты, основанные на допущении о сплошности строения, дают практически удовлетворительные результаты.

Это объясняется тем, что размеры реальных деталей во много раз больше межатомных расстояний.

Сделанное допущение дает возможность в дальнейшем использовать математический аппарат непрерывных функций.

2-е допущение. Материал детали однороден, т. е. обладает во всех точках одинаковыми свойствами. Металлы обладают высокой однородностью, т. е. имеют во всех точках детали практически одинаковые свойства. Менее однородными являются дерево, бетон, камень, пластмассы с наполнителем. Например, бетон содержит в себе в качестве наполнителя небольших размеров камни, гравий, щебень, свойства которых отличаются от свойств цемента. В дереве имеются сучки, свойства которых также сильно отличаются от свойств остальной массы дерева. В пластмассах свойства смолы отличаются от свойств наполнителя.

Тем не менее, как показывает опыт, расчеты, основанные на допущении об однородности материала детали, дают удовлетворительные результаты для основных конструкционных материалов.

3-е допущение. Материал детали изотропен, т. е. обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами.

Исследования показывают, что кристаллы, из которых состоят многие материалы, обладают в различных направлениях весьма различными свойствами. Например, для меди прочность кристаллов в разных направлениях различается более чем в три раза.

Однако у материалов, имеющих мелкозернистую структуру, благодаря большому количеству кристаллов, расположенных в беспорядке, свойства в разных направлениях выравниваются, «осредняются», и можно считать эти материалы практически **изотропными**.

Для таких материалов, как дерево, железобетон, пластмассы, указанное допущение выполняется лишь приблизительно.

Материалы, свойства которых в разных направлениях различны, называются **анизотропными**.

4-е допущение. В теле до приложения нагрузки нет внутренних (начальных) усилий. Изменению формы и размеров тела под нагрузкой сопротивляются силы взаимодействия между частицами материала, называемые **силами упругости**. В дальнейшем, говоря о внутренних силах, будем иметь в виду именно эти силы упругости, не принимая во внимание молекулярные силы, имеющиеся и в ненагруженном теле.

Это допущение полностью не выполняется ни для одного материала. В стальных деталях имеются внутренние силы, вызванные неравномерностью остывания, в дереве — неравномерностью высыхания, в бетоне — в процессе твердения.

Значение этих сил конструктору обычно неизвестно. В тех случаях, когда есть основания предполагать, что эти силы значительны, стараются определить их экспериментальным путем.

Следует отметить, что вопрос о начальных усилиях в конструкциях и их элементах изучен совершенно недостаточно.

5-е допущение, или принцип независимости действия сил. Результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке.

Под словами «результат воздействия» в зависимости от конкретной задачи следует понимать деформации, внутренние силы, возникающие в теле, и перемещения отдельных точек.

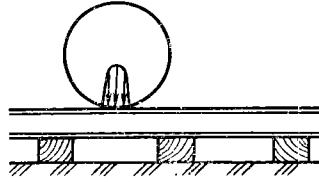


Рис. 1.3

Необходимо иметь в виду, что действие отдельных сил системы должно рассматриваться вместе с соответствующими им реакциями связей.

Принцип независимости действия сил, широко применяемый в теоретической механике для абсолютно твердых тел, к деформируемым телам применим лишь при следующих двух условиях:

1. Перемещения точек приложения сил малы по сравнению с размерами тела.

2. Перемещения, являющиеся результатом деформации тела, линейно зависят от действующих сил. Такие тела (системы) называют **линейно деформируемыми** или **подчиняющимися закону Гука**.

В обычных конструкциях оба эти условия выполняются, и поэтому принцип независимости действия сил при силовом расчете конструкций используется широко.

6-е допущение, или принцип Сен-Венана. В точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, внутренние силы весьма мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок.

Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что может упростить расчет.

Например, при расчете рельса (рис. 1.3) как стержня, опирающегося на многие опоры (шпалы), можно фактическую нагрузку от колеса, распределенную по площадке контакта по некоторому закону (определить который довольно сложно), заменить сосредоточенной (равнодействующей) силой.

О некоторых других допущениях и гипотезах будет сказано далее в соответствующих местах курса.

§ 3. ВНЕШНИЕ СИЛЫ (НАГРУЗКИ)

Нагрузки, действующие на сооружения и их элементы, представляют собой силы или пары сил (моменты), которые могут рассматриваться как **сосредоточенные** или **распределенные**.

Правда, в природе сосредоточенных сил не бывает. Все реальные силы — это силы, распределенные по некоторой площади или объему. Например, давление колеса на рельс практически передается через небольшую площадку, получающуюся в результате деформации рельса и колеса (рис. 1.3). Однако для определения внутренних сил, возникающих в рельсе и колесе на некотором расстоянии от площади передачи давления, можно (на основании сформулированного выше принципа Сен-Венана) распределенную нагрузку заменить сосредоточенной равнодействующей силой, что упростит расчет.

Сосредоточенные нагрузки выражаются в ньютонах, килоньютонах или меганьютонах (Н, кН, МН).

Распределенные нагрузки могут быть **поверхностными** (например, давление ветра или воды на стенку) и **объемными** (например, сила тяжести тела, силы инерции).

Силу тяжести стержня, учитывая небольшие размеры его поперечного сечения по сравнению с длиной, рассматривают обычно не как объемную нагрузку, а как нагрузку, распределенную по длине стержня.

Распределенные нагрузки выражаются в единицах силы, отнесенных к единице длины, или к единице поверхности, или к единице объема. И сосредоточенные, и распределенные нагрузки могут быть как статическими, так и динамическими.

Статическими называются нагрузки, которые изменяют свою величину или точку приложения (или направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями можно пренебречь. При действии таких нагрузок колебания сооружений и их частей пренебрежимо малы.

Динамическими называются нагрузки, изменяющиеся во времени с большой скоростью (например, ударные нагрузки). Действие таких нагрузок сопровождается возникновением колебаний сооружений. При колебании же вследствие изменения скорости колеблющихся масс возникают силы инерции, пропорциональные (по второму закону Ньютона) колеблющимся массам и ускорениям. Эти силы инерции могут во много раз превосходить те же нагрузки, приложенные статически.

Законы изменения нагрузок во времени могут иметь весьма сложный характер.

В частном случае изменение нагрузки F^* может носить периодически повторяющийся характер, так что через одни и те же промежутки времени t максимальные значения нагрузки будут повторяться.

Нагрузки такого типа называются **нагрузками с установившимся режимом** или **повторно-периодическими** (рис. I.4). Расчеты на прочность при действии таких нагрузок рассматриваются в гл. XII.

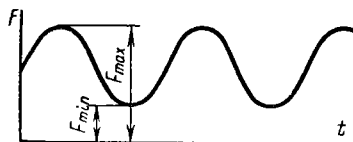


Рис. I.4

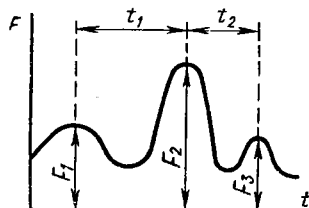


Рис. I.5

Однако во многих других случаях изменение нагрузки во времени не имеет установившегося характера (рис. I.5). Таковы нагрузки, действующие на детали автомобилей, тракторов, станков, а также нагрузки, действующие на сооружения (дома, мачты и т. п.) от давления ветра, снега и т. п. Эти нагрузки называются **повторными нагрузками не установившихся режимов**.

Более глубокое изучение таких нагрузок возможно лишь с помощью методов статистики и теории вероятности, которые применяются для изучения случайных величин.

В качестве примера рассмотрим нагрузку от действия ветра, на которую рассчитываются башенные краны, мосты, дома и другие сооружения.

Известно, что скорость ветра, от которой зависит ветровая нагрузка, в одном и том же географическом пункте непрерывно изменяется. Например, для Московской области, по наблюдениям за длительный период, скорость ветра изменялась в очень широких пределах (рис. I.6).

Наиболее часто (33 % всех случаев) наблюдалась скорость ветра 3,5 м/с. Но были случаи, когда скорость ветра достигала 12 м/с (2 % всех случаев) и более. С другой стороны, были случаи, когда скорость ветра была меньшей, иногда равнялась нулю (крайне редко).

* Force (англ.) — сила.

Кривые, подобные рассмотренной, называются **кривыми распределения**. Они дают наглядное представление о степени рассеяния (изменчивости) данной величины.

Какую же скорость ветра нужно принять для расчета? В качестве первого напрашивается предложение принять наибольшую зарегистрированную скорость ветра. Однако, во-первых, нет никакой гарантии, что за время службы сооружение

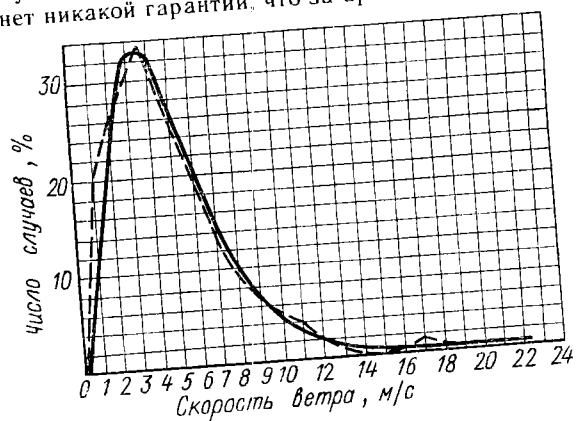


Рис. 1.6

не подвергнется действию более сильного ветра, чем зарегистрированный ранее. Во-вторых, очевидно, что принимать для расчета сооружения с небольшим сроком службы (например, деревянного) скорость ветра с повторяемостью один раз в 200 или 100 лет неэкономично. Следовательно, величина расчетной нагрузки должна быть тесно увязана со сроком службы сооружения и со степенью его ответственности.

Все, что сказано о ветровой нагрузке, относится в равной мере и к большинству других нагрузок.

При расчете строительных сооружений величины расчетных нагрузок регламентируются техническими условиями и нормами проектирования.

В машиностроении расчетные нагрузки определяются в зависимости от конкретных условий работы машины: по номинальным значениям мощности, угловой скорости отдельных ее деталей, силы тяжести, сил инерции и т. п. Например, при расчете деталей трехтонного автомобиля учитывают номинальный полезный груз, равный 3 т. Возможность же перегрузки автомобиля учитывают тем, что размеры сечения деталей назначают с некоторым запасом прочности.

О величине этого запаса прочности подробнее будет сказано в § 11.

§ 4. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Как было отмечено ранее, все тела под действием приложенных к ним внешних сил в той или иной степени деформируются, т. е. изменяют свои размеры или форму либо и то и другое одновременно.

Изменение линейных размеров тела или его частей называется **линейной**, а изменение угловых размеров — **угловой деформациями**.

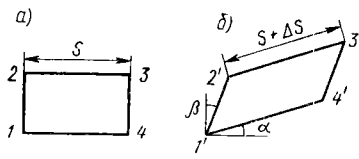


Рис. 1.7

При этом увеличение размеров тела называется **удлинением**, а уменьшение размеров — **укорочением**.

Если деформации изменяются по объему тела, то говорят о деформации в **данной точке** тела, в определенном направлении.

Если на поверхности тела, вблизи исследуемой точки, нанести весьма малый прямоугольник 1234 (рис. 1.7, а), то в результате деформации этот прямоугольник в общем случае примет вид параллелограмма $1'2'3'4'$ (рис. 1.7, б).

Длины сторон прямоугольника изменяются (увеличатся или уменьшатся), а стороны повернутся по отношению к первоначальному положению.

Если, например, длина стороны 23 изменится на величину Δs , то отношение

$$\epsilon_{\text{ср}} = \Delta s / s$$

называется **средней линейной деформацией** (в данном случае средним удлинением) в точке 2.

При уменьшении отрезка s в пределе получим

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Delta s / s = \epsilon,$$

где величина ϵ называется **истинной линейной деформацией** в точке 2 в направлении 23 .

Изменение первоначального прямого угла между сторонами рассматриваемого прямоугольника $\gamma = \alpha + \beta$ будет характеризовать угловую деформацию (или угол сдвига) в данной точке.

Опыт показывает, что деформации, как линейные, так и угловые, могут после снятия нагрузки или полностью исчезнуть, или исчезнуть лишь частично (в зависимости от материала и величины нагружения).

Деформации, исчезающие после разгрузки тела, называются **упругими**, а свойство тел принимать после разгрузки свою первоначальную форму называется **упругостью**.

Деформации же, сохраняемые телом и после удаления нагрузки, называются **остаточными** или **пластическими**, а свойство материалов давать остаточные деформации называется **пластичностью**.

Зная деформации тела во всех его точках и условия закрепления, можно определить **перемещения** всех точек тела, т. е. указать их положение (новые координаты) после деформации. Для нормальной эксплуатации сооружения деформации его отдельных элементов должны быть, как правило, упругими, а вызванные ими перемещения не должны превосходить по величине определенных допустимых значений. Эти условия, выраженные в форме тех или иных уравнений, называются **условиями жесткости**. В некоторых случаях допускаются небольшие пластические деформации (для конструкций из железобетона, пластмасс и для конструкций из металла при действии высоких температур).

§ 5. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Внутренние силы (силы упругости), возникающие в теле под действием нагрузки, — **силы непрерывно распределенные** (в соответствии с принятым допущением о непрерывности материала тела).

Как определяются эти силы в любой точке тела, будет показано ниже.

Теперь же займемся определением тех равнодействующих усилий (в том числе и моментов), к которым приводятся в сечении эти силы упругости. Эти равнодействующие усилия представляют собой не что иное, как составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил.

Для определения внутренних усилий (или внутренних силовых факторов) применяется **метод сечений**, заключающийся в следующем.

Для тела, находящегося в равновесии (рис. 1.8), в интересующем нас месте мысленно делается разрез, например по a — a . Затем одна из частей отбрасывается (обычно та, к которой приложено больше сил). Взаимодействие частей друг на друга

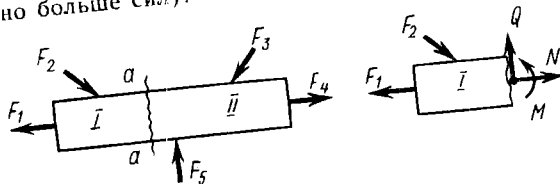


Рис. 1.8

заменяется внутренними усилиями, которые уравнивают внешние силы, действующие на отсеченную часть. Если внешние силы лежат в одной плоскости, то для их уравнивания необходимо в общем случае приложить в сечении три внутренних усилия: силу N , направленную вдоль оси стержня и называемую **продольной силой**; силу Q , действующую в плоскости поперечного сечения и называемую **поперечной силой**, и момент M , плоскость действия которого перпендикулярна плоскости сечения. Этот момент возникает при изгибе стержня и называется **изгибающим моментом**.

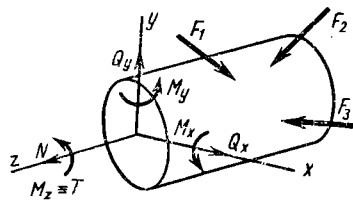


Рис. 1.9

После этого составляют уравнения равновесия для отсеченной части тела, из которых и определяются N , Q , M . Действительно, проецируя силы, действующие на отсеченную часть, на направление оси стержня и приравнявая сумму проекций нулю,

найдем N ; проецируя силы на направление, перпендикулярное оси стержня, определим Q ; приравнявая нулю сумму моментов относительно какой-либо точки, определим M .

Если же внешние силы, к которым относятся также реакции опор, не лежат в одной плоскости (пространственная задача), то в поперечном сечении в общем случае могут возникнуть шесть внутренних усилий, являющихся компонентами главного вектора и главного момента системы внутренних сил (рис. 1.9); продольная сила N , поперечная сила Q_y , поперечная сила Q_x и три момента: M_y , M_x и M_z , причем первые два являются изгибающими, а третий M_z , действующий в плоскости сечения, называется **крутящим T^*** , так как он возникает при закручивании стержня. Для определения этих шести усилий необходимо использовать шесть уравнений равновесия: приравнять нулю суммы проекций сил (приложенных к отсеченной части) на три оси координат и приравнять нулю суммы моментов сил относительно трех осей, имеющих начало в центре тяжести сечения.

На рис. 1.9 и в последующих принята **правовинтовая система координат**, причем ось z будем совмещать с осью стержня.

Итак, для нахождения внутренних усилий необходимо: 1) разрезать стержень или систему стержней; 2) отбросить одну часть; 3) приложить в сечении усилия, способные уравновесить внешние силы, действующие на отсеченную часть; 4) найти

* *Torsion* (англ.) — кручение.

значения усилий из уравнений равновесия, составленных для отсеченной части.

В частном случае в поперечном сечении стержня могут возникать:

1. Только продольная сила N . Этот случай нагружения называется **растяжением** (если сила N направлена от сечения) или **сжатием** (если продольная сила направлена к сечению).

2. Только поперечная сила Q_x или Q_y . Это случай **сдвига**.

3. Только крутящий момент T . Это случай **кручения**.

4. Только изгибающий момент M_x или M_y . Это случай **изгиба**.

5. Несколько усилий, например изгибающий и крутящий моменты. Это случаи **сложных деформаций** (или **сложного сопротивления**), которые будут рассмотрены в конце курса.

Если число неизвестных усилий равно числу уравнений равновесия, задача называется **статически определимой**, если же число неизвестных усилий больше числа уравнений равновесия — **статически неопределимой**.

Для статически неопределимых задач кроме уравнений равновесия необходимо использовать еще дополнительные уравнения при рассмотрении деформации системы (см. § 20).

Рассмотрим на двух примерах применение метода сечений.

Пример 1.1. Определить усилия в стержнях AB и BC системы, изображенной на рис. 1.10.

Решение. Для определения усилий в стержнях AB и BC применим метод сечений. Проведем сечение $a-a$ по стержням, отбросим левую часть и рассмотрим равновесие правой части.

Усилия в обоих стержнях вначале предположим растягивающими (растягивающие усилия на чертеже направлены от узла) и обозначим их N_1 и N_2 . Составим уравнения равновесия отсеченной части системы:

$$\sum Y = 0; \quad -F - N_2 \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Отсюда } N_2 = -\frac{F}{\sin \alpha}.$$

Знак минус указывает, что усилие N_2 будет не растягивающим, как мы предположили, а сжимающим. Составим второе уравнение равновесия

$$\sum X = 0; \quad -N_1 - N_2 \cos \alpha = 0.$$

Подставив значение $N_2 = -\frac{F}{\sin \alpha}$, получим $N_1 = F \operatorname{ctg} \alpha$.

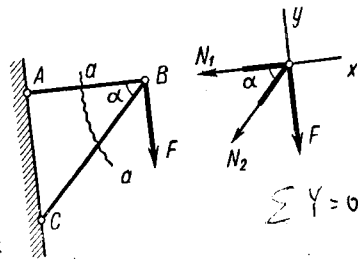
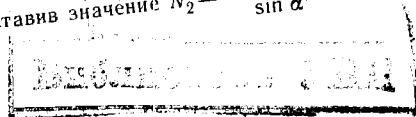


Рис. 1.10

Пример 1.2. Определить усилия в стержнях AB и CD системы, показанной на рис. 1.11.

Решение. Рассмотрим равновесие части системы ниже сечения. Приравняв нулю сумму проекций на горизонтальную ось, убедимся, что горизонтальная опорная реакция в подвижной опоре (слева от точки A) будет равна нулю.

Приравняв нулю сумму моментов относительно A всех сил, действующих на отсеченную часть, получим

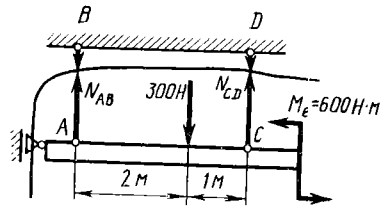


Рис. 1.11

$$\sum M_A = 0;$$

$$-300 \cdot 2 + N_{CD} \cdot 3 + 600 = 0,$$

$$\text{откуда } N_{CD} = 0.$$

Приравнявая нулю сумму проекции тех же сил на вертикаль, получим

$$\sum Y = 0; N_{AB} - 300 = 0,$$

$$\text{откуда } N_{AB} = 300 \text{ Н.}$$

Положительное значение N_{AB} показывает, что это усилие направлено так, как показано на чертеже, т. е. является растягивающим.

§ 6. НАПРЯЖЕНИЯ

Было отмечено, что в поперечном сечении стержня действуют не сосредоточенные внутренние усилия N , Q , T и т. д., а непрерывно распределенные силы, интенсивность которых может быть различной в разных точках сечения и в разном направлении.

Как же измерить интенсивность внутренних сил в данной точке данного сечения, например в точке B (рис. 1.12)?

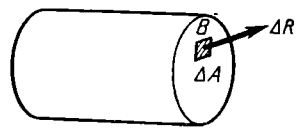


Рис. 1.12

Выделим вокруг точки B малую площадку ΔA . Пусть ΔR — равнодействующая внутренних сил, действующих на эту площадку.

Тогда среднее значение внутренних сил, приходящихся на единицу площади ΔA * рассматриваемой площадки, будет равно

$$p_m = \Delta R / \Delta A. \quad (1.1)$$

Величина p_m называется **средним напряжением**. Она характеризует среднюю интенсивность внутренних сил. Уменьшая

* A_{area} (англ.) — площадь.

размеры площади, в пределе получим

$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta R / \Delta A.$$

(1.2)

Величина ρ называется **истинным напряжением** или просто **напряжением** в данной точке данного сечения. Упрощенно можно сказать, что напряжением называется внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке данного сечения.

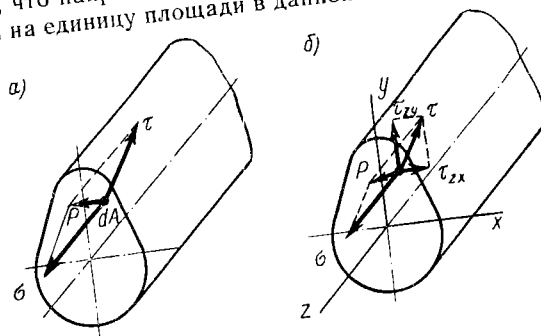


Рис. 1.13

Как видно из формул (1.1) и (1.2), размерность напряжения [сила] / [площадь].

Единица напряжения — паскаль, сокращенно Па = Н/м² =

$$\frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{м}^2} = \text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Так как при этом реальные значения напряжений будут выражаться очень большими числами, то следует применять кратные значения единиц, например МПа (мегапаскаль) = 10⁶ Па.

Полное напряжение ρ можно разложить на две составляющие (рис. 1.13, а):

1) составляющую, нормальную к плоскости сечения. Эта составляющая обозначается σ и называется **нормальным напряжением**;

2) составляющую, лежащую в плоскости сечения. Эта составляющая обозначается τ и называется **касательным напряжением**. Касательное напряжение в зависимости от действующих сил может иметь любое направление в плоскости сечения. Для удобства τ представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей (рис. 1.13, б).

Принятые обозначения напряжений показаны на рис. 1.13, б. У нормального напряжения ставится индекс, указывающий, какой координатной оси параллельно данное напряжение. Рас-

тягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее — отрицательным. Обозначения касательных напряжений снабжены двумя индексами: первый из них указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия данного напряжения, а второй — какой оси параллельно само напряжение.

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определенный физический смысл. [Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости рассматриваемого сечения.]

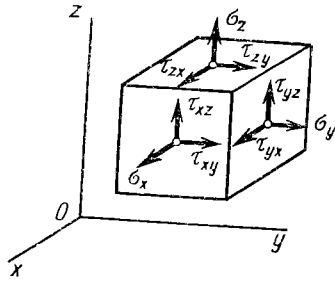


Рис. I.14

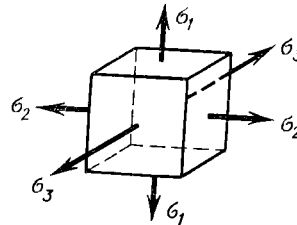


Рис. I.15

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечного малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рис. I.14.

[Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела, называется **напряженным состоянием** в данной точке.]

Если по граням кубика действуют одни только нормальные напряжения, то они называются **главными**, а площадки, на которых они действуют, называются **главными площадками**.

Можно доказать, что в каждой точке напряженного тела существуют три главные взаимно перпендикулярные площадки. Главные напряжения обозначают σ_1 , σ_2 и σ_3 . При этом большее (с учетом знака) главное напряжение обозначается σ_1 , а меньшее (с учетом знака) обозначается σ_3 .

Различные виды напряженного состояния классифицируются в зависимости от числа возникающих главных напряжений.

Если отличны от нуля все три главных напряжения, то напряженное состояние называется **трехосным** или **объемным** (рис. I.15).

Если равно нулю одно из главных напряжений, то напряженное состояние называется **двухосным** или **плоским**.

Если равны нулю два главных напряжения, то напряженное состояние называется **одноосным** или **линейным**.

Зная напряженное состояние в любой точке детали, можно оценить прочность этой детали.

В простейших случаях оценка прочности элементов конструкций производится или по наибольшему нормальному напряжению, или по наибольшему касательному напряжению (расчет на сдвиг), так что **условие прочности** записывается в виде

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}^* \quad (I.3)$$

или

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} \quad (I.4)$$

где σ_{adm} и τ_{adm} — допускаемые значения нормального и касательного напряжений, зависящие от материала и условий работы рассчитываемого элемента.

Величины σ_{adm} и τ_{adm} выбираются с таким расчетом, чтобы была обеспечена нормальная эксплуатация конструкции (см. § 11).

В более сложных случаях оценка прочности производится по **приведенному напряжению** в соответствии с той или иной гипотезой прочности (см. гл. VIII).

Далее будет показано, что в некоторых случаях более правильно условие прочности детали составлять не по напряжениям, а по нагрузкам, так как достижение предельного значения напряжения в наиболее опасной точке еще не всегда означает разрушение детали.

* Индекс *adm* от *admissible* (англ.) — допустимый.

ГЛАВА II

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Рассмотрим случай осевого (центрального) растяжения или сжатия, когда внешние силы действуют по оси стержня (рис. II.1). Для определения внутренних усилий (продольных сил) применим метод сечений.

Проведем какое-нибудь сечение, например $a - a$, и рассмотрим равновесие нижней отсеченной части. Воздействие верхней отброшенной части на нижнюю заменим продольной силой и предварительно направим ее от сечения, т. е. предположим, что сила является растягивающей. Составим уравнение равновесия. Проецируя все силы, действующие на нижнюю часть, на направление параллельное оси стержня, и приравнявая сумму проекций нулю, получаем $N_1 + 8F - 5F = 0$, откуда $N_1 = -3F$.

Знак минус показывает, что направление силы N_1 следует изменить на обратное, т. е. продольная сила будет в данном случае не растягивающей, как мы предположили, а сжимающей. Аналогично найдем продольную силу в сечении $b - b$: $N_2 = 5F$ (растяжение). Условимся продольную силу, соответствующую растяжению, считать положительной.

Наглядное представление о законе изменения продольных сил по длине стержня дает график (эпюра продольных сил), ось абсцисс которого проводится параллельно оси стержня, а ось ординат ей перпендикулярна. По оси ординат в выбранном масштабе откладывают значения продольных сил (с учетом знаков) в поперечных сечениях стержня. Для рассмотренного случая эпюра N представлена на рис. II.1.

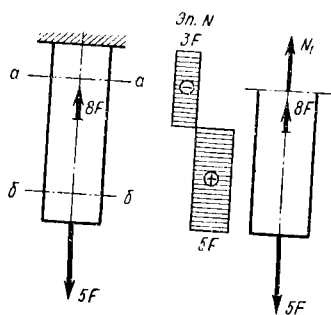


Рис. II.1

§ 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Если на поверхность призматического стержня нанести сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня (рис. П.2, а), и приложить к нему растягивающую силу, то можно убедиться в том, что линии сетки и после деформации останутся взаимно перпендикулярными, за исключением небольшого участ-

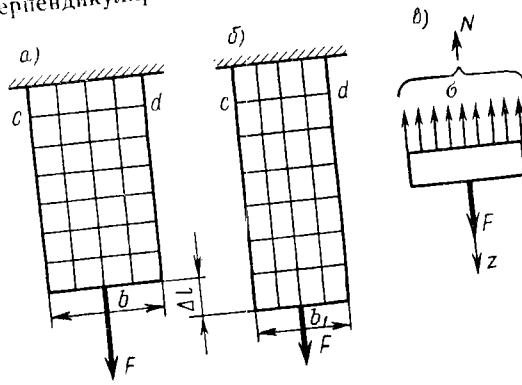


Рис. П.2

тка стержня вблизи точки приложения силы, который из рассмотрения пока исключаем*, но расстояния между ними изменятся (рис. П.2, б). Все горизонтальные линии, например *cd*, переместятся вниз, оставаясь горизонтальными и прямыми. Можно предположить также, что и внутри стержня будет такая же картина, т. е. поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся плоскими и нормальными к оси и после деформации.

Эту гипотезу называют гипотезой плоских сечений или гипотезой Бернулли. Формулы, полученные на основе этой гипотезы, подтверждаются результатами опытов.

Такая картина деформаций дает основание считать, что в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению, а касательные напряжения равны нулю.

Продольная сила N есть равнодействующая нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (П.1)$$

* На рис. П.2 это не отражено.

Поскольку $\sigma = \text{const}$, из формулы (II.1) получим

$$N = \sigma A,$$

откуда

$$\sigma = N/A.$$

(II.2)*

В частном случае, когда на стержень действует одна внешняя сила F , из уравнения равновесия получим $N = F$ (рис. II.2, в) и вместо общей формулы (II.2) получим частный вид формулы для растяжения

$$\sigma = F/A. \quad (\text{II.2a})$$

Эти формулы справедливы и для сжатия, с той только разницей, что сжимающие напряжения считаются отрицательными.

Кроме того, сжатые стержни помимо расчета на прочность рассчитываются также на устойчивость (см. гл. X).

§ 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Опыты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии — наоборот (рис. II.2, б).

Для многих материалов при нагружении до определенных пределов опыты показывают следующую зависимость между относительным удлинением стержня ϵ и напряжением σ :

$$\epsilon = \sigma/E,$$

(II.3)

где $\epsilon = \Delta l/l = (l_1 - l)/l$ — относительное удлинение стержня; Δl — абсолютное удлинение стержня; l — длина образца до деформации; l_1 — то же, после деформации.

Эта зависимость носит название **закона Гука** и формулируется следующим образом:

линейные деформации прямо пропорциональны нормальным напряжениям.

В формуле (II.3) E — коэффициент, зависящий от материала и называемый **модулем продольной упругости** или **модулем упругости первого рода**. Он характеризует жесткость материала, т. е. его способность сопротивляться деформированию.

Поскольку ϵ — безразмерная величина, то из формулы (II.3) видно, что единица E та же, что и σ , т. е. паскаль (Па).

В табл. II.1 даны средние значения E для некоторых материалов.

* Формула (II.2) и последующие наиболее важные формулы отмечены прямоугольной рамкой.

Таблица П.1

Материал	E , МПа	Материал	E , МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5 - 2,2 \cdot 10^5$	Алюминий	$0,675 \cdot 10^5$
Медь	$1 \cdot 10^5$	Чугун	$0,75 \cdot 10^5 - 1,6 \cdot 10^5$
Дерево	$1 \cdot 10^4$	Стеклопластики	$0,18 \cdot 10^5 - 0,40 \cdot 10^5$

Для других материалов значение E можно найти в справочниках.

Имея в виду, что для стержня постоянного сечения $\epsilon = \Delta l/l$, а $\sigma = N/A$, из формулы (П.3) можно получить формулу для определения полного (абсолютного) удлинения (укорочения) стержня

$$\Delta l = Nl/(EA). \quad (П.4)$$

Между продольной ϵ и поперечной ϵ' деформациями существует установленная экспериментально зависимость

$$\epsilon' = -\nu \epsilon. \quad (П.5)$$

Здесь ν — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), характеризующий способность материала к поперечным деформациям. При пользовании формулой (П.5) удлинение считается положительным, укорочение — отрицательным. Значение ν для всех материалов колеблется в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$, а для большинства материалов — от 0,25 до 0,35 (табл. П.2).

Для стали при упругих деформациях можно принимать $\nu \approx 0,3$. Зная ϵ' , можно определить полное поперечное сужение или расширение стержня Δb :

$$\epsilon' = \Delta b/b, \text{ а } \Delta b = b - b_1. \quad (П.6)$$

где b — первоначальный поперечный размер стержня; b_1 — поперечный размер стержня после деформации.

Таблица П.2

Материал	ν	Материал	ν
Сталь	0,25—0,33	Свинец	0,45
Медь	0,31—0,34	Латунь	0,32—0,42
Бронза	0,32—0,35	Алюминий	0,32—0,36
Чугун	0,23—0,27	Цинк	0,21
Стекло	0,25	Камень	0,16—0,34
Бетон	0,08—0,18	Каучук	0,47
Пробка	0,00	Фанера	0,07
Целлюлоид	0,39		

В стержнях переменного сечения (рис. II.3) напряжения в поперечных сечениях можно считать распределенными равномерно (если угол конусности $\alpha \leq 12^\circ$) и определять их по той же формуле (II. 2), что и для стержня постоянного сечения.

Для определения деформаций стержня переменного сечения, в поперечных сечениях которого действует продольная сила N , найдем сначала удлинение $\Delta(dz)$ элемента длиной dz , которое

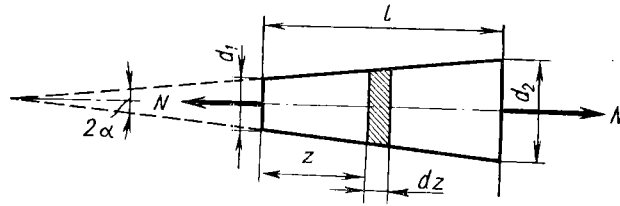


Рис. II.3

является дифференциалом полного удлинения Δl . Согласно закону Гука, имеем

$$\Delta(dz) = d(\Delta l) = Ndz / (EA). \quad (\text{II.7})$$

Полное удлинение стержня получим, интегрируя выражение (II.7) в пределах от $z=0$ до $z=l$:

$$\Delta l = \int_0^l Ndz / (EA). \quad (\text{II.8})$$

Если N и E — величины постоянные, то

$$\Delta l = \frac{N}{E} \int_0^l \frac{dz}{A}. \quad (\text{II.9})$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо знать закон изменения A в зависимости от z .

Для ступенчатых стержней (рис. II.4) интегрирование заменяется суммированием и полное изменение длины бруса определяется как алгебраическая сумма деформаций его отдельных частей, в пределах которых E , N и A постоянны:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta l_i = \sum \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (\text{II.10})$$

Например, для стержня согласно рис. II.4 имеем

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = N_1 l_1 / (E_1 A_1) + N_2 l_2 / (E_2 A_2),$$

где $N_1 = N_2 = F$.

Определим теперь удлинение стержня постоянного сечения под действием силы тяжести, представляющей собой нагрузку, равномерно распределенную вдоль стержня (рис. II.5, а). Удельный вес материала бруса обозначим γ . Рассмотрим деформацию элемента dz , выделенного на расстоянии z от нижнего конца. Он растягивается силой γAz , равной силе тяжести части стержня, расположенной ниже сечения $m-n$. Удлинение элемента равно

$$\Delta(dz) = d(\Delta l) = \gamma Az dz / (EA) = \gamma z dz / E. \quad (II.11)$$

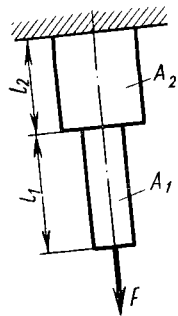


Рис. II.4

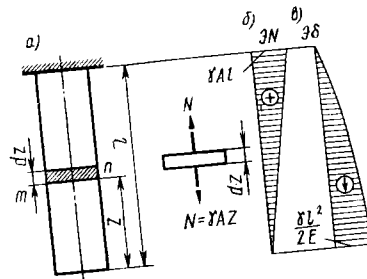


Рис. II.5

Интегрируя это выражение в пределах от $z=0$ до $z=l$, получаем удлинение бруса

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\gamma}{E} z dz = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (II.12)$$

Это выражение можно представить в другом виде, если учесть, что сила тяжести бруса равна $G = \gamma Al$, т. е. $\gamma l = G/A$. Тогда из (II.12) получим

$$\Delta l = Gl / (2EA). \quad (II.13)$$

Следовательно, удлинение бруса постоянного сечения от собственной силы тяжести в два раза меньше удлинения от действия силы, равной силе тяжести бруса и приложенной к его концу.

Перемещение δ_z сечения $m-n$ будет равно удлинению части стержня длиной $l-z$. По формуле (II.12) имеем

$$\delta_z = \int_z^l \frac{\gamma}{E} z dz = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2).$$

На рис. II.5, б представлена эпюра N . Знак плюс означает растяжение. Эпюра перемещений представлена на рис. II.5, в.

Стрелка на эюре показывает, что все сечения стержня перемещаются вниз.

Пример II.1. Для стального стержня, изображенного на рис. II.6, определить во всех поперечных сечениях продольную силу N и напряжения σ . Определить также вертикальные перемещения δ для всех поперечных сечений стержня. Результаты изобразить графически, построив эюры N , σ и δ .

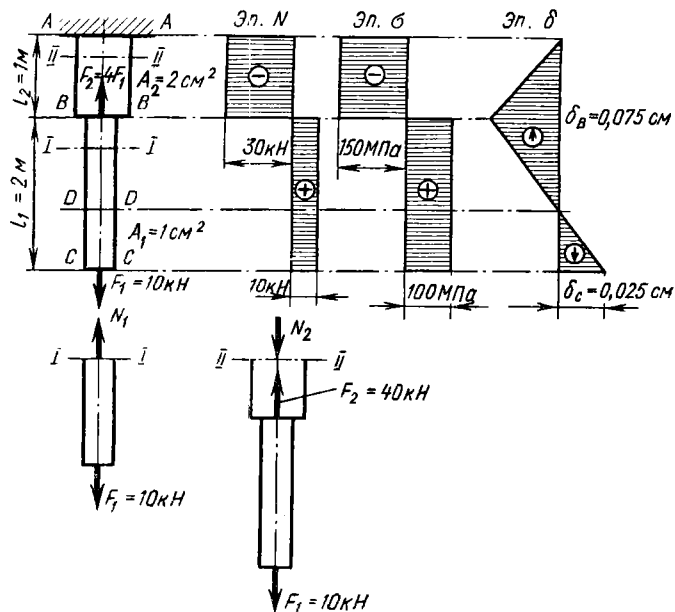


Рис. II.6

Решение. Для определения N мысленно разрезаем брус по сечениям I—I и II—II. По условиям равновесия части стержня ниже сечения I—I получим $N_1 = F_1 = 10\text{ кН}$ (растяжение). Из условия равновесия части стержня ниже сечения II—II получим

$$-N_2 + F_2 - F_1 = 0 \text{ или } N_2 = 30\text{ кН (сжатие)}.$$

Выбрав масштаб, строим эюру продольных сил. При этом растягивающую продольную силу N_1 считаем положительной, сжимающую N_2 — отрицательной. Напряжения равны: в сечениях нижней части стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10^4}{1 \cdot 10^{-4}} = 100\text{ МПа (растяжение)},$$

в сечениях верхней части стержня

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -30 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{-4}) = -150 \text{ МПа (сжатие)}.$$

В определенном масштабе строим эпюру напряжений.

Для построения эпюры δ определяем перемещения характерных сечений $B - B$ и $C - C$ (перемещение сечения $A - A$ равно нулю).

Сечение $B - B$ будет перемещаться вверх, поскольку верхняя часть стержня сжимается:

$$\delta_B = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = -150 \cdot 1 / (2 \cdot 10^5) = -0,00075 \text{ м} = -0,075 \text{ см (вверх)}.$$

Перемещение сечения вниз считаем положительным, вверх — отрицательным.

Перемещение сечения $C - C$ является алгебраической суммой перемещения сечения $B - B$ (δ_B) и удлинения части стержня длиной l_1 :

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l = -0,00075 + \frac{100 \cdot 2}{2 \cdot 10^5} = 0,00025 \text{ м} = 0,025 \text{ см (вниз)}.$$

В определенном масштабе откладываем на эпюре значения δ_C и δ_B , соединяем полученные точки прямыми линиями, так как при действии сосредоточенных внешних сил перемещения линейно зависят от абсцисс сечений стержня, и получаем график (эпюру) перемещений. Из графика видно, что некоторое сечение $D - D$ не перемещается. Сечения, расположенные выше сечения $D - D$, перемещаются вверх; сечения, расположенные ниже, перемещаются вниз.

Пример II.2. Определить удлинение стержня конической формы круглого поперечного сечения, если наименьший диаметр равен d_1 , наибольший — d_2 (см. рис. II.3).

Решение. Диаметр сечения стержня на расстоянии z от левого конца равен

$$d_z = d_1 + (d_2 - d_1) \frac{z}{l}.$$

Следовательно, площадь сечения стержня на расстоянии z равна

$$A_z = \frac{\pi d_z^2}{4} = \frac{\pi}{4} \left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z \right)^2.$$

Удлинение бруса, по формуле (II.9),

$$\Delta l = \frac{4N}{\pi E} \int_0^l \frac{dz}{\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z \right)^2} = \frac{4Nl}{\pi E d_1 d_2},$$

отсюда при $d_1 = d_2$ получаем величину удлинения стержня постоянного (круглого) сечения.

Назначение и виды испытаний

Для изучения свойств материалов и установления значения предельных напряжений (по разрушению или по пластическим деформациям) производят испытания образцов материала вплоть до разрушения. Испытания производят при нагрузках следующих категорий: статической, ударной и циклической (испытание на усталость или выносливость).

По виду деформации, испытываемой образцом, различают испытания на растяжение, сжатие, кручение и изгиб. Значительно реже проводят испытания на сложное сопротивление, например сочетание растяжения и кручения.

Так как результаты испытаний зависят от формы образца, скорости его деформирования, температуры при испытании и т. д., то эксперимент обычно ведут в условиях, предусмотренных ГОСТами.

Испытания производят на специальных машинах, разнообразных по конструкции и мощности.

Для измерения деформаций применяют специальные приборы (тензометры), имеющие высокую чувствительность.

Подробное описание испытательных машин и приборов можно найти в специальных руководствах.

Диаграммы растяжения и сжатия

Наибольшее распространение имеют испытания на растяжение статической нагрузкой, так как они наиболее просты и в то же время во многих случаях дают возможность достаточно верно судить о поведении материала при других видах деформации.

На рис. 11.7 показаны применяемые в СССР образцы для испытаний на растяжение.

Применяют как цилиндрические образцы диаметром 3 мм и более (рис. 11.7, а, б, в), так и плоские (рис. 11.7, г) толщиной 0,5 мм и более с начальной расчетной длиной $l_0 = 5,65 \sqrt{A}$ или $l_0 = 11,3 \sqrt{A}$. В первом случае образцы называют **короткими**, во втором — **длинными**.

Соотношение между рабочей $l_1 = l_{\text{раб}}$ и расчетной l_0 длинами принимают:

для цилиндрических образцов от $l_1 = l_0 + 0,5d_0$ до $l_1 = l_0 + 2d_0$;

для плоских образцов толщиной 4 мм и более от $l_1 = l_0 + 1,5 \sqrt{A}$ до $l_1 = l_0 + 2,5 \sqrt{A}$.

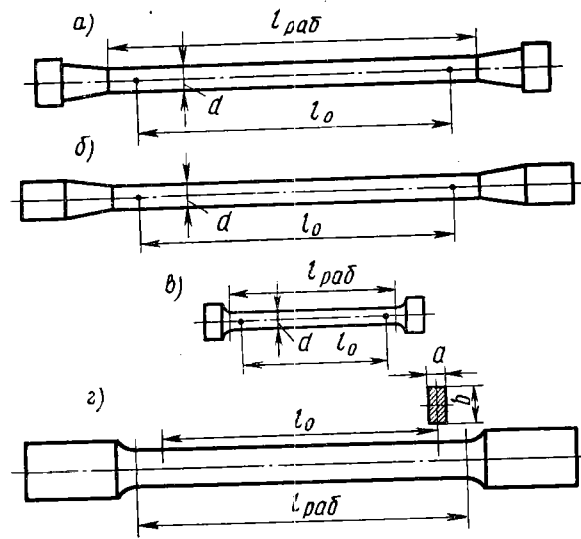


Рис. II.7

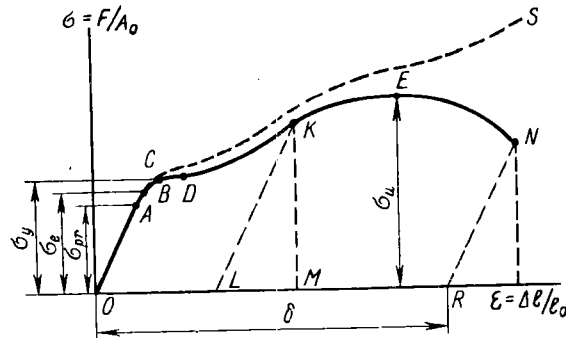


Рис. II.8

При испытании цилиндрических образцов в качестве основных применяют образцы диаметром $d_0 = 10$ мм.

Целью испытания на растяжение является определение механических характеристик материала. При испытании автоматически записывается диаграмма зависимости между растягивающей образец силой F и удлинением образца Δl . По очертанию она похожа на диаграмму, представленную на рис. II.8.

Для того чтобы можно было сравнивать результаты испытания образцов различных размеров, изготовленных из одинако-

вых материалов, диаграмму растяжения перестраивают и изображают в другой системе координат: по оси ординат откладывают значение нормального напряжения в поперечном сечении растягиваемого образца $\sigma_t = F/A_0$, где A_0 — первоначальная площадь сечения образца, а по оси абсцисс откладывают относительные удлинения образца $\varepsilon = \Delta l/l_0$, где l_0 — его первоначальная длина*.

Эту диаграмму называют **условной диаграммой растяжения** (или диаграммой условных напряжений), так как напряжения и относительные удлинения вычисляются соответственно по отношению к первоначальной площади сечения и первоначальной длине образца.

На рис. П.8 приведена в координатах ε , σ_t диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали. Как видно, вначале на участке OA до некоторого напряжения σ_{pr} , называемого **пределом пропорциональности**, деформации растут пропорционально напряжениям. Следовательно, до предела пропорциональности сохраняет силу закон Гука. Для стали Ст3 предел пропорциональности $\sigma_{pr} \approx 210$ МПа. При дальнейшем увеличении нагрузки диаграмма становится криволинейной.

Однако если напряжения не превосходят определенного значения **предела упругости** σ_e , то материал сохраняет свои упругие свойства, т. е. при разгрузке образец восстанавливает свою первоначальную форму и размеры**.

Для стали Ст3 предел упругости $\sigma_e \approx 220$ МПа. Разница между пределом пропорциональности и пределом упругости невелика, и на практике обычно не делают различия между ними.

Если нагрузку увеличивать еще дальше, то наступает такой момент (точка C), когда деформации начинают расти практически без увеличения нагрузки.

Горизонтальный участок CD диаграммы называется **площадкой текучести**.

Напряжение, при котором происходит рост деформаций без увеличения нагрузки, называется пределом текучести и обозначается σ_y ***.

Для стали Ст3 предел текучести $\sigma_y \approx 230$ МПа.

* Индекс l от *tension* (англ.) — растяжение.

** Индекс e от *elastic* (англ.) — упругий. По ГОСТу условным пределом упругости называется напряжение, при котором остаточная деформация достигает 0,05 %.

*** Иногда эту характеристику называют физическим пределом текучести в отличие от условного предела текучести, о котором сказано несколько ниже. Индекс y от *yield* (англ.) — текучесть.

Ряд материалов при растяжении дает диаграмму без выраженной площадки текучести: для них устанавливается так называемый **условный предел текучести**.

Напряжение, при котором остаточная деформация равна 0,2%, называется условным пределом текучести.

Условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$. К материалам, для которых определяется условный предел текучести, относятся дюралюминий, бронза, высокоуглеродистые и легированные стали (например, для стали 37ХНЗА $\sigma_{0,2} = 1000$ МПа).

Как показывают исследования образцов стали, текучесть сопровождается значительными взаимными сдвигами кристаллов, в результате чего на поверхности образца появляются

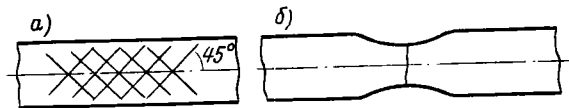


Рис. II.9

линии (так называемые **линии Людерса — Чернова**), наклоненные к оси образца под углом примерно 45° (рис. II.9, а).

Удлинившись на некоторую величину при постоянном значении силы, т. е. претерпев состояние текучести, материал снова приобретает способность сопротивляться растяжению (упрочняется) и диаграмма за точкой *D* поднимается вверх, хотя гораздо более полого, чем раньше (см. рис. II.8).

Точка *E* диаграммы соответствует наибольшему условному напряжению, называемому **пределом прочности** или **временным сопротивлением** *. Для стали Ст3 предел прочности составляет $\sigma_u = 380$ МПа **. У высокопрочных сталей величина предела прочности достигает 1700 МПа (сталь 40ХМНА и др.). Предел прочности при растяжении обозначается $\sigma_{u,t}$, при сжатии — $\sigma_{u,c}$.

При достижении напряжением величины предела прочности на образце появляется резкое местное сужение, так называемая **шейка** (рис. II.9, б). Площадь сечения образца в шейке быстро уменьшается и, как следствие, падает усилие и условное напряжение. Разрыв образца происходит по наименьшему сечению шейки.

* Часто временное сопротивление определяют как напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца.

** Индекс *u* от *ultimate* (англ.) — предельный.

Кроме перечисленных выше характеристик прочности материала при испытании на растяжение определяют также **относительное остаточное удлинение при разрыве ϵ_r** , являющееся **важной характеристикой пластичности материала** *:

$$\epsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%, \quad (\text{II.14})$$

где l_0 — первоначальная расчетная длина образца [см. рис. (II.7)]; l_1 — расчетная длина образца после разрыва. Она измеряется после стыковки двух частей разорванного образца.

Для стали Ст3 $\epsilon_r \geq 21\%$. У высокопрочных сталей эта величина снижается до 7—10%. Величина ϵ_r зависит от соотношения между длиной образца и его поперечными размерами. Поэтому в справочниках указывается, на каком образце определялась величина ϵ_r . Например, $\epsilon_{r,5}$ обозначает, что удлинение было определено на пятикратном образце, т. е. образце, у которого отношение расчетной длины к диаметру равно пяти.

Определенное таким путем удлинение является некоторым средним удлинением, так как деформации распределяются по длине образца неравномерно. Наибольшее удлинение возникает в месте разрыва. Оно называется **истинным удлинением при разрыве**.

Второй характеристикой пластичности материала является **относительное остаточное сужение при разрыве**

$$\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\%, \quad (\text{II.15})$$

где A_0 — первоначальная площадь поперечного сечения; A_1 — площадь поперечного сечения в наиболее тонком месте шейки после разрыва.

Величина ψ_r — характеризует свойства пластичности более точно, чем ϵ_r , поскольку она в меньшей степени зависит от формы образца. Для стали Ст3 значение ψ_r составляет 50—60%.

Как было отмечено выше, диаграммы растяжения для многих марок стали, а также сплавов цветных металлов не имеют площадки текучести. Характерный вид диаграммы растяжения для подобных материалов показан на рис. II.10.

Для изучения значительных пластических деформаций необходимо знать **истинную диаграмму растяжения**, дающую зависимость между истинными деформациями и истинными напряжениями, которые вычисляются путем деления растягивающей

* Индекс r от *rest* (англ.) — остаток.

силы на истинную площадь поперечного сечения образца (с учетом сужения).

Так как истинная площадь поперечного сечения меньше первоначальной, то диаграмма истинных напряжений идет выше диаграммы условных напряжений, особенно после образования шейки, когда происходит резкое уменьшение поперечного сечения образца (кривая *OCS* на рис. II.8).

Обычно применяют приближенные способы построения диаграммы истинных напряжений, которые излагаются в полных курсах сопротивления материалов.

Рассмотренная диаграмма растяжения (см. рис. II.8) является характерной для так называемых **пластичных материалов**, т. е. материалов, способных получить значительные остаточные деформации ϵ_r , не разрушаясь.

Чем пластичнее материал, тем больше ϵ_r . К числу весьма пластичных материалов относятся медь, алюминий, латунь, малоуглеродистая сталь и др.

Менее пластичными являются дюраль и бронза, а слабопластичными материалами — большинство легированных сталей.

Противоположным свойству пластичности является **хрупкость**, т. е. способность материала разрушаться при незначительных остаточных деформациях. Для таких материалов величина остаточного удлинения при разрыве не превышает 2—5%, в ряде случаев измеряется долями процента. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, камень, бетон, стекло, стеклопластики и др. Следует отметить, что деление материалов на пластичные и хрупкие является условным, так как в зависимости от условий испытания (скорость нагружения, температура) и вида напряженного состояния хрупкие материалы способны вести себя как пластичные, а пластичные — как хрупкие.

Например, чугуновый образец в условиях всестороннего сжатия ведет себя как пластичный материал, т. е. не разрушается даже при значительных деформациях. И наоборот, стальной образец с выточкой разрушится при сравнительно небольшой деформации.

Таким образом, правильнее говорить о пластичном и хрупком состоянии материала.

При растяжении образцов из хрупких материалов наблюдается ряд особенностей. Диаграмма растяжения чугуна показана

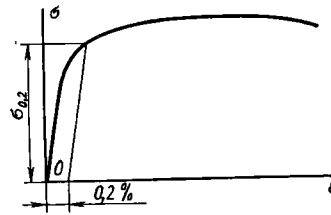


Рис. II.10

на рис. П.11. Из диаграммы видно, что отклонение от закона Гука начинается очень рано. Разрыв наступает внезапно при очень малых деформациях и без образования шейки, что характерно для всех хрупких материалов.

При испытании на растяжение хрупких материалов определяют, как правило, только предел прочности. Обычно при практических расчетах для хрупких материалов отклонение от закона Гука не учитывают, т. е. криволинейную диаграмму заменяют условной прямолинейной диаграммой (см. штриховую линию на рис. П.11).

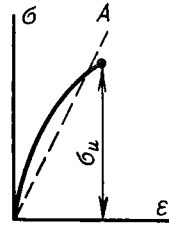


Рис. П.11

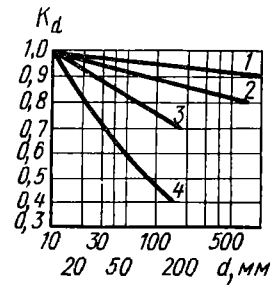


Рис. П.12

Для чугуна и других хрупких материалов заметное влияние на предел прочности при разрыве оказывают размеры образца. Это оценивается масштабным коэффициентом

$$K_d = \sigma_{u,d} / \sigma_{u,10}, \quad (\text{П.16})$$

где $\sigma_{u,d}$ — предел прочности образца диаметром d ; $\sigma_{u,10}$ — предел прочности образца диаметром $d = 10$ мм.

На рис. П.12 представлены кривые зависимости K_d от диаметра образца для следующих материалов: высокоуглеродистая и марганцовистая стали — 1, легированная сталь — 2, модифицированный чугун — 3, серый чугун — 4.

Особенно существенно сказывается на величине K_d рост абсолютных размеров образца для чугуна (кривые 3 и 4 на рис. П.12).

Следует отметить, что в последние годы достигнуты значительные успехи в деле создания высокопрочных материалов.

Теоретическое значение предела прочности, вычисленное на основе учета взаимодействия атомов в кристалле, составляет приблизительно десятую часть от E , т. е. для стали — примерно 20 ГПа*, что почти в 10 раз больше, чем предел прочности для существующих марок высокопрочных сталей.

* ГПа (гигапаскаль) = 10^9 Па.

К теоретической прочности можно приблизиться двумя путями.

Первый путь — это создание материалов, свободных от внутренних дефектов, имеющих идеальную кристаллическую решетку.

В настоящее время уже получены нитевидные кристаллы («усы») железа и других металлов, в которых полностью отсутствуют внутренние дефекты.

Предел прочности таких «усов» из железа достигает 15 ГПа.

Другой путь, как это ни парадоксально, прямо противоположен и состоит в создании металлов, имеющих возможно больше нарушений правильной кристаллической структуры. Эти нарушения микроструктуры — точечные и линейные (дислокации) — могут быть получены или сочетанием пластического деформирования металла (наклепа) с термообработкой, или путем нейтронного облучения. При этом из кристаллической решетки выбиваются атомы и в решетке создаются или свободные места — вакансии, или атомы без места — внедренные атомы. Эти нарушения микроструктуры делают металл более прочным, так как затрудняют передвижение внутри кристалла, подобно тому как шероховатые поверхности двух брусков препятствуют их скольжению.

Повышение условного предела текучести при повторных нагружениях (наклеп)

Если при нагружении образца не был превышен предел упругости, то при разгрузке все деформации полностью исчезнут и при повторном нагружении этот образец будет себя вести так же, как и при первом нагружении.

Если же образец был нагружен до напряжения, большего предела упругости, например до напряжения, соответствующего точке K диаграммы на рис. 11.8, то разгрузка пойдет по прямой KL , параллельной линии OA . Упругая часть деформации (отрезок LM) исчезнет, пластическая же часть деформации (отрезок OL) останется.

Если материал нагружать снова, то диаграмма пойдет по прямой LK до самой точки K^* . Остаточное удлинение при разрыве будет измеряться величиной отрезка LR , т. е. иметь меньшую величину, чем при первичном однократном нагружении до разрыва.

* Линия нагрузки не совсем совпадает с линией разгрузки, но отклонение незначительно и его можно не учитывать.

Следовательно, при повторных нагружениях образца, предельно растянутого до возникновения в нем напряжений, больших предела текучести, предел пропорциональности повышается до того уровня, которого достигли напряжения при предшествующей нагрузке. Если между разгрузкой и повторным нагружением был перерыв, то предел пропорциональности повышается еще больше.

Следует отметить, что диаграмма *LKEN*, получаемая при повторном нагружении, не имеет площадки текучести, поэтому для образца, претерпевшего разгрузку и повторное нагружение, определяется условный предел текучести ($\sigma_{0,2}$), который, очевидно, выше предела текучести при первичном нагружении. В указанном смысле можно говорить о повышении предела текучести при повторном нагружении.

Явление повышения предела пропорциональности и снижения пластичности материала при повторных нагружениях называется **наклепом**. Наклеп во многих случаях является нежелательным явлением, так как наклепанный металл становится более хрупким.

Однако в целом ряде других случаев наклеп полезен и его создают искусственно, например в деталях, подвергающихся воздействию переменных нагрузок (см. гл. XII).

Влияние времени на деформацию. Последствие. Ползучесть. Релаксация

Опыты показывают, что деформация под нагрузкой проявляется не сразу, а в течение определенного периода времени.

Если при напряжениях, соответствующих точке *S* (рис. II.13), прекратить нагружение и оставить образец на некоторое время под нагрузкой, то деформация будет расти (отрезок *ST*), причем вначале быстрее, а затем медленнее. При разгрузке часть деформации, соответствующая отрезку *GI*, исчезнет почти мгновенно, другая часть деформации, изображаемая отрезком *OG*, исчезнет не сразу, а спустя некоторое время*. Это явление изменения упругих деформаций во времени называют **упругим последствием**. Чем однороднее материал, тем меньше упругое последствие. Для тугоплавких материалов при обычных температурах оно настолько невелико, что его можно не учитывать. Наоборот, в материалах органического происхождения упругое последствие велико и с ним нельзя не считаться.

* На рис. II.13 отрезок *ST* для наглядности показан в значительно более крупном масштабе, чем остальная диаграмма.

У многих материалов под нагрузкой при высоких температурах наблюдается другое явление — непрерывный рост остаточных деформаций, заканчивающийся в определенных условиях разрушением материала. Например, стальная труба, являющаяся паропроводом и работающая при определенном давлении и температуре пара, непрерывно увеличивает свой диаметр.

Изменение во времени пластических деформаций в нагруженной детали называют **пластическим последствием**.

Изменение во времени полных деформаций (т. е. суммы упругих и пластических) носит название **упругопластического последствия** или **ползучести***.

У металлов с низкой температурой плавления (например, цинка, свинца), а также у бетона ползучесть наблюдается уже при нормальных температурах. У стали заметная ползучесть проявляется при температурах, превышающих 300 °С.

Напряжение, при котором скорость деформации ползучести при заданной температуре и постоянной нагрузке составляет определенное, наперед заданное значение, например 0,0001% в час, называется **пределом ползучести по допустимой скорости деформации**.

В некоторых случаях приходится ограничивать деформацию ползучести.

Пределом ползучести по допустимой деформации ползучести называется напряжение, при котором деформация ползучести за заданный промежуток времени достигает определенного (заданного) значения.

Тесно связано с ползучестью другое явление, при котором упругие деформации тела со временем переходят в пластические. Результатом этого является изменение действующих напряжений при сохранении полной величины деформации. Такое явление называется **релаксацией**. Вследствие релаксации соединения, выполненные с натягом, при длительной работе в условиях высоких температур ослабевают.

Влияние температуры

Опыты показывают, что свойства материалов зависят от температуры. На рис. II.14 представлено несколько диаграмм

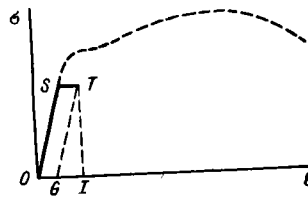


Рис. II.13

* Некоторые авторы определяют ползучесть как пластическое последствие.

растяжения малоуглеродистой стали (0,15 % С) при разных температурах, а на рис. II.15 и II.16 — графики зависимости упругих постоянных (E и ν) и механических характеристик (σ_{pr} , σ_y и σ_u), а также ψ_r и ϵ_r от температуры для той же стали. (На рис. II.16 вместо ϵ_r , значит δ_r).

Из графиков видно, какое большое влияние оказывает температура на свойства стали. До температуры 300°C временное

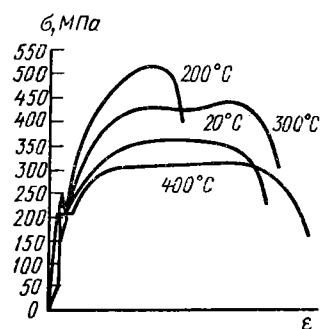


Рис. II.14

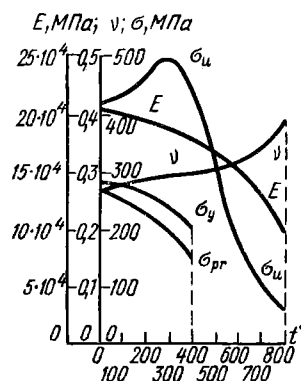


Рис. II.15

сопротивление повышается (на 20—30 %), а при дальнейшем повышении температуры резко снижается.

Предел текучести и предел пропорциональности с повышением температуры уменьшаются. При температуре 400 °C предел текучести составляет 60—70 % от его значения при комнатной температуре. С повышением температуры длина площадки текучести сокращается и при температуре около 400 °C площадка вовсе исчезает.

Пластические свойства (относительное остаточное удлинение при разрыве ϵ_r и сужение площади поперечного сечения ψ_r) с повышением температуры до 300 °C снижаются, а при дальнейшем ее повышении увеличиваются (рис. II.16).

Механические свойства материалов зависят от продолжительности испытания.

При некоторых температурах (например, для малоуглеродистой стали при температуре выше 800 °C) испытуемый образец может быть разрушен при напряжении, меньшем предела пропорциональности, соответствующего комнатной температуре, если это напряжение будет действовать достаточно продолжительное время. Поэтому прочность металлов при высоких температурах характеризуют не обычным пределом прочности, опре-

деляемым путем кратковременных испытаний, а так называемым **пределом длительной прочности** ($\sigma_{u,t}$). Предел длительной прочности — это то условное напряжение, воздействие которого в течение определенного промежутка времени при постоянной температуре приводит к разрушению образца.

Детали, предназначенные для работы при высоких температурах, изготавливают из специальных теплоустойчивых (жаропрочных) и жаростойких сталей, содержащих примеси специальных легирующих элементов.

Под **теплоустойчивостью** (жаропрочностью) стали понимают ее способность сохранять высокую прочность при повышенных температурах, в частности высокую сопротивляемость ползучести. Для повышения теплоустойчивости сталь легируют вольфрамом, молибденом, ванадием.

Под **жаростойкостью** понимают способность стали сопротивляться химическому разрушению поверхности под воздействием горячего воздуха или газа (газовая коррозия). Для повышения жаростойкости сталь легируют хромом, кремнием и алюминием.

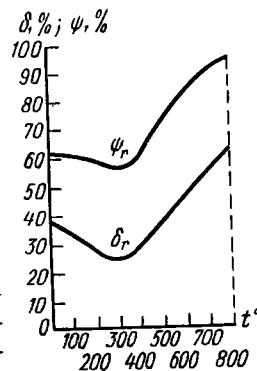


Рис. II.16

Некоторые особенности испытаний на сжатие

Для испытаний на сжатие берут образцы в форме кубиков или невысоких цилиндров высотой $h \leq 3d$, так как при более длинных образцах может произойти их изгиб.

Применение очень коротких образцов также нежелательно, так как развивающиеся по торцам образца силы трения препятствуют его расширению, в результате чего образец принимает бочкообразную форму (рис. II.17, а, б).

Результаты испытания на сжатие зависят от сил трения, и поэтому цилиндрические образцы целесообразнее кубических.

Влияние сил трения можно частично ослабить смазкой (например, парафином) торцов образца.

На рис. II.17, б показан характер разрушения кубика камня при отсутствии смазки, а на рис. II.17, в — при наличии смазки.

В последнее время для испытания на сжатие начинают применять полые образцы с конической торцовой поверхностью (рис. II.17, г).

Выбором соответствующего угла конусности можно в значительной степени уменьшить влияние сил трения. Этот весьма важный вопрос о влиянии сил трения на прочность образца требует дальнейших экспериментальных и теоретических исследований.

Диаграмма сжатия хрупкого материала аналогична диаграмме его растяжения (см. рис. II.11). Разрушение происходит при незначительных деформациях. Испытание дает возможность

установить предел прочности и относительную остаточную деформацию при разрушении.

Для хрупких материалов предел прочности при сжатии значительно больше предела прочности при растяжении.

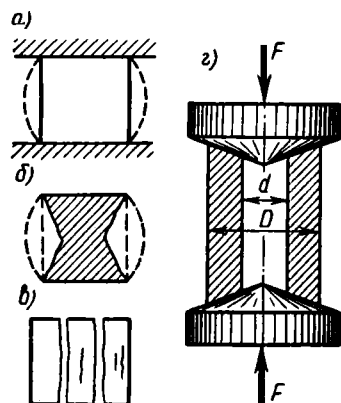


Рис. II.17

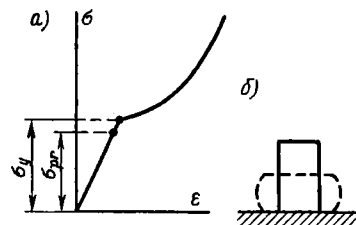


Рис. II.18

Типичная диаграмма сжатия пластичного материала (малоуглеродистая сталь) показана на рис. II.18, а. Вначале диаграмма имеет вид, аналогичный диаграмме растяжения. Дальше кривая идет круто вверх из-за увеличения площади сечения образца и упрочнения материала. Разрушения при этом не получается. Образец просто сплющивается (рис. II.18, б), и опыт приходится прекращать. В результате испытания определяют предел текучести при сжатии. Для пластичных материалов пределы текучести при растяжении и сжатии практически одинаковы, но площадка текучести при сжатии выявлена значительно меньше, чем при растяжении.

Механические свойства пластмасс

В последние годы в конструкциях получают все большее применение новые материалы на основе природных и синтетических полимеров, так называемые **пластмассы** или **пластики**.

Пластмассы представляют собой или чистые смолы, или композицию из смолы и ряда компонентов — наполнителя, пластификатора, стабилизатора, красителя и др.

В зависимости от применяемого наполнителя пластмассы разделяют на **композиционные** и **слоистые**. Композиционные, в свою очередь, разделяют на **порошкообразные**, **волокнистые** и **с наполнителем в виде крошки**.

Наполнители применяют органические и неорганические; они служат для модификации свойств материала, улучшения физико-механических, фрикционных и других свойств материала, а также для снижения его стоимости.

Органическими наполнителями являются древесная мука, целлюлоза, бумага, хлопчатобумажная ткань. В качестве неорганических наполнителей используют асбест, графит, стеклоткань, слюду, кварц и другие материалы.

Наполнители в виде полотнищ (тканых или нетканых) позволяют получать слоистые пластики высокой прочности.

При использовании в качестве наполнителя хлопчатобумажной ткани получают **текстолит**, стеклоткани — **стеклотекстолит**, бумаги — **гетинакс**, асбестовой ткани — **асботекстолит**, древесного шпона — **древеснослоистые пластики** (ДСП), песка и щебня — **пластобетон**.

Особую группу наполнителей составляют армирующие материалы на основе стекловолокна, стекложута, стекломата, которые могут обеспечить изготовление деталей, по прочности не уступающих стали (табл. II.3) *.

Т а б л и ц а II.3

Стеклонаполнитель	Предел прочности σ_d , МПа	Модуль упругости E , МПа
Стекломат	140—210	$(8 \div 12) \cdot 10^3$
Стекломат с ромбической структурой	500—600	$(18 \div 23) \cdot 10^3$
Стеклоткань	180—350	$(14 \div 21) \cdot 10^3$
Параллельные стекловолокна	780—1050	$(23 \div 40) \cdot 10^3$

Стеклопластики, полученные на основе полиамидов, поликарбонатов, используют для изготовления брони, не пробиваемой пулями.

Из стеклопластиков изготавливают направляющие лопадки компрессоров, авиационных и ракетных двигателей, что дает возможность снизить вес этих аппаратов.

Стеклопластики сравнительно хорошо сопротивляются действию динамических нагрузок и способны гасить колебания элементов конструкций.

* Данные табл. II.3 относятся к кратковременному нагружению.

Пластмассы как конструкционные материалы имеют следующие особенности:

1) малый удельный вес γ ($1,2 \cdot 10^4$ — $1,9 \cdot 10^4$ Н/м³), что в сочетании с высокой прочностью дает возможность выполнять очень легкие конструкции;

2) диаграммы деформирования пластмасс весьма разнообразны; у стеклопластиков с направленным расположением стеклянных нитей, как, например, у СВАН, это прямые почти до разрушения (рис. П.19, а).

Однако у большинства пластмасс диаграммы ϵ — σ имеют вид плавной кривой, которую на некотором протяжении от начала координат можно принимать за прямую.

У большинства конструкционных пластмасс удлинение при разрыве не превосходит 3—4 %, т. е. значительно ниже, чем у сталей;

3) пластмассы имеют обычно неодинаковые механические характеристики при растяжении и сжатии;

4) пластмассы значительно хуже, чем металлы, сопротивляются переменным и длительным нагрузкам;

5) для характеристик упругих и прочностных свойств пластиков характерен большой разброс, чем у металлов. Это объясняется старением материалов, гигроскопичностью, влиянием температуры, анизотропией свойств, неоднородностью структуры, влиянием технологии изготовления;

6) для пластмасс характерно более значительное по сравнению с металлами проявление масштабного эффекта. Предел

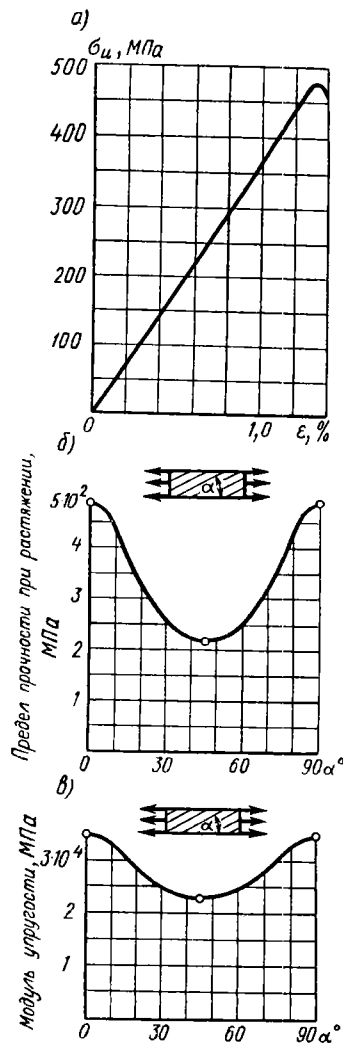


Рис. П.19

прочности деталей из пластмасс существенно уменьшается с увеличением размеров поперечного сечения.

На рис. II.20 приведены значения масштабного коэффициента K_d при растяжении для стеклопластиков в зависимости от площади поперечного сечения образца;

7) свойства пластмасс существенно зависят от температуры. На рис. II.21 приведены графики, показывающие зависимость предела прочности пластмасс от температуры.

Основные группы пластмасс могут работать в интервале температур от -200° до $+250^\circ\text{C}$; с появлением пластмасс на основе крем-

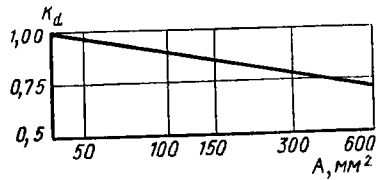


Рис. II.20

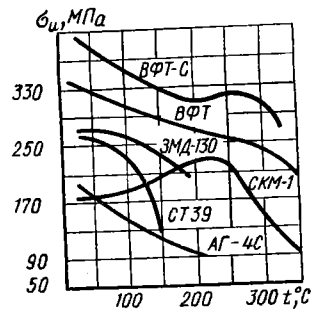


Рис. II.21

нийорганических полимеров и фторопластов верхний предел температуры поднялся до 500°C .

Стеклопластики на основе кремнийорганической смолы не теряют прочности при -250°C , выдерживают нагрев до 2750°C в течение 2 мин;

8) пластики обладают большой склонностью к ползучести и релаксации даже при нормальных температурах;

9) для пластиков характерна малая жесткость; модуль упругости у самых жестких пластиков (стеклопластиков) примерно в 10 раз меньше, чем у сталей. В результате этого детали из пластмасс получают более значительные деформации и перемещения, чем стальные детали;

10) многие пластмассы анизотропны, т. е. имеют в разных направлениях различные свойства.

Анизотропия ярко выражена у слоистых пластиков. На рис. II.19, б, в приведены зависимости предела прочности и модуля упругости при растяжении от направления нагружения для СВМ 1 : 1.

Анизотропия свойств должна соответствующим образом учитываться при расчетах на прочность.

Следует отметить, что механические свойства пластмасс еще далеко не изучены и предстоит большая работа в этом направлении.

Неоднородность материалов

В § 2 было введено допущение об однородности и изотропности материала в пределах одной детали. Однако в разных деталях, изготовленных из одного и того же материала, механические и пластические свойства материала могут весьма различаться между собой (рассеиваться).

Действительно, если изготовить несколько одинаковых образцов из одной и той же стали, испытать их на растяжение и определить предел текучести, то результаты, как правило, не будут совпадать друг с другом.

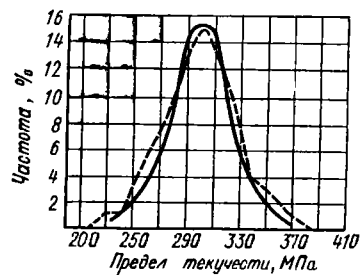


Рис. 11.22

Для примера на рис. 11.22 представлена кривая распределения предела текучести для малоуглеродистой стали Ст3, построенная по результатам испытания 6000 образцов. Штриховой линией показана опытная частотная диаграмма, сплошной линией — теоретическая кривая (так называемая кривая нормального распределения), к которой стремится при увеличении числа испытаний кривая, построенная по экспериментальным данным.

Из этого рисунка видно, что наиболее часто встречающимся значением предела текучести для этой стали является $\sigma_y = 300$ МПа (15 % всех случаев). Минимальное значение близко к 200 МПа и максимальное — к 390 МПа. Вид кривой показывает, что не исключена возможность (при большем числе испытаний) обнаружения, с одной стороны, более низких и, с другой стороны, более высоких значений предела текучести.

Аналогичные кривые построены и для других материалов. Для менее однородных материалов, например бетона, дерева, они более пологи, т. е. в этом случае разброс (рассеяние) значений соответствующей величины значительно больше.

На рис. 11.23, а, приведены частотные диаграммы предела прочности для сталей Ст1 — Ст5, из которых видно, что сталь Ст4 и сталь Ст5 менее однородны, чем остальные стали.

Как видно из рис. 11.23, а, частотные диаграммы для сталей разных марок частично наслаиваются друг на друга, т. е. стали разных марок могут иметь одинаковые механические характеристики, в том числе предел прочности.

Например, предел прочности $\sigma_u = 400$ МПа может быть у четырех марок сталей: Ст1, Ст2, Ст3, Ст4.

Наличие кривых распределения, дающих весьма надежную характеристику степени однородности материала, позволяет более дифференцированно рассчитывать детали, принимая для более однородных материалов при прочих равных условиях более высокие допускаемые напряжения.

Кривые распределения лежат в основе принципиально нового статистического метода расчета конструкций (см. § 112).

Рассмотренные частотные диаграммы свидетельствуют о наличии значительных резервов экономии материалов, которые можно реализовать при более тщательной маркировке сталей,

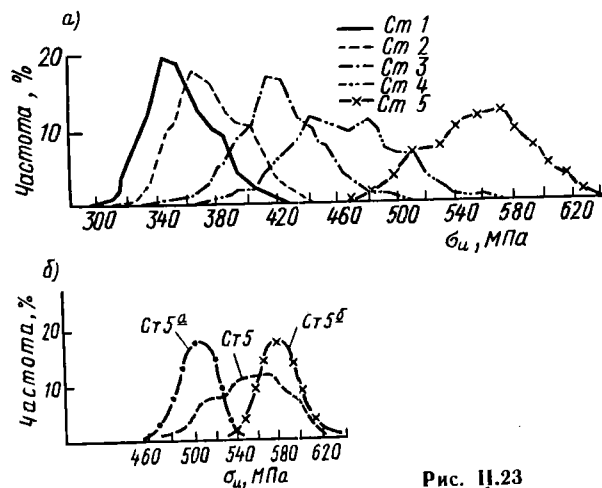


Рис. 11.23

если маркировка производится по показателям прочности (стали общего назначения, т. е. стали группы А). Если вместо одной марки стали, например Ст5, с разбросом значений предела прочности от 460 до 640 МПа (рис. 11.23, б), выпускать две марки сталей Ст5а и Ст5б, каждая из которых имеет примерно вдвое меньший разброс значений предела прочности (рис. 11.23, б), то экономия материалов получится за счет того, что для стали марки Ст5б можно принимать большее допускаемое напряжение по сравнению с существующей сталью Ст5.

§ 11. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ. ВЫБОР ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Мы уже знаем теперь, что и фактические нагрузки, действующие на деталь, и свойства материалов, из которых она изготовлена, могут значительно отличаться от тех, которые принимаются для расчета.

При этом факторы, снижающие прочность детали (перегрузки, неоднородность материалов и т. д.), носят чаще всего случайный характер и предварительно не могут быть учтены.

Так как детали и сооружения в целом должны безопасно работать и при этих неблагоприятных условиях, то необходимо принять определенные меры предосторожности. С этой целью напряжения, обеспечивающие безотказную работу (эксплуатацию) машины или любого другого сооружения, должны быть ниже тех предельных напряжений, при которых может произойти разрушение или возникнуть пластические деформации.

Таким образом, принимают

$$\sigma_{adm} = \sigma_u / n_{adm}, \quad (II.17)$$

где σ_{adm} — допускаемое напряжение; n_{adm} — нормативный (т. е. предписываемый нормами проектирования конструкций) коэффициент запаса прочности, называемый также коэффициентом безопасности; σ_u — предельное напряжение материала.

При статических нагрузках за предельное напряжение для хрупких материалов принимают предел прочности, для пластичных — предел текучести, так как при напряжениях, равных пределу текучести, возникают значительные пластические деформации, которые недопустимы.

Таким образом, коэффициент запаса прочности вводится для того, чтобы обеспечить безопасную, надежную работу сооружения и отдельных его частей, несмотря на возможные неблагоприятные отклонения действительных условий их работы от расчетных.

Вопрос о нормативном коэффициенте запаса прочности n_{adm} решается с учетом имеющегося опыта эксплуатации сооружений и машин.

В последнее время один общий коэффициент запаса n_{adm} расчленяют на ряд составляющих, частных коэффициентов запаса, каждый из которых отражает влияние на прочность элемента конструкции какого-либо определенного фактора или группы факторов. Например, один из коэффициентов отражает возможные отклонения механических характеристик материала от принимаемых в качестве расчетных, другой — отклонения действующих нагрузок от их расчетных значений и т. д.

Такое разделение общего коэффициента запаса позволяет лучше учесть многообразные конкретные условия работы деталей машин и сооружений и проектировать их с большей надежностью и экономичностью.

Коэффициент запаса прочности представляют в виде произведения

$$n = n_1 n_2 n_3 \dots \quad (II.18)$$

В вопросе о частных коэффициентах и их значениях до сих пор нет единообразия.

Значения коэффициентов запаса прочности обычно принимают на основании опыта конструирования и эксплуатации машин определенного типа. В настоящее время в машиностроении имеются рекомендации пользоваться одним, тремя, пятью и даже десятью частными коэффициентами запаса прочности. В «Справочнике машиностроителя» рекомендуется пользоваться тремя частными коэффициентами:

$$n = n_1 n_2 n_3, \quad (\text{II.19})$$

где n_1 — коэффициент, учитывающий неточность в определении нагрузок и напряжений. Значение этого коэффициента при повышенной точности определения действующих напряжений может приниматься равным 1,2—1,5, при меньшей точности расчета — 2—3; n_2 — коэффициент, учитывающий неоднородность материала, повышенную его чувствительность к недостаткам механической обработки. Коэффициент n_2 в расчетах по пределу текучести при действии статических нагрузок можно принимать по табл. II.4 (без учета влияния абсолютных размеров) в зависимости от отношения предела текучести к пределу прочности.

Т а б л и ц а II.4

σ_y/σ_u	0,45—0,55	0,55—0,7	0,7—0,9
n_2	1,2—1,5	1,4—1,8	1,7—2,2

При расчете по пределу прочности для малопластичных и хрупких материалов величину n_2 принимают: а) для малопластичных материалов (высокопрочные стали при низком отпуске) $n_2 = 2 \div 3$; б) для хрупких материалов $n_2 = 3 \div 4$; в) для весьма хрупких материалов $n_2 = 4 \div 6$. При расчете на усталость (см. гл. XII) коэффициент n_2 принимают равным 1,5—2,0, увеличивая его для материала с пониженной однородностью (особенно для литья) и для деталей больших размеров до 3,0 и более; n_3 — коэффициент условий работы, учитывающий степень ответственности детали, равный 1—1,5.

В табл. II.5 приведены ориентировочные значения допускаемых напряжений при статическом нагружении для некоторых материалов.

Т а б л и ц а П.5

Материалы	Допускаемые напряжения, МПа	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый в отливках:		
СЧ12—28	20—30	70—110
СЧ15—32	25—40	90—150
СЧ21—40	35—55	160—200
Сталь:		
Ст0 и Ст2	140	140
Ст3	160	160
Ст3 в мостах	140	140
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	60—250	60—250
Сталь легированная конструкционная в машиностроении	140—400 и выше	100—400 и выше
Дюралюминий	80—150	80—150
Латунь	70—140	70—140
Сосна вдоль волокон	7—10	10—12
Дуб вдоль волокон	9—13	13—15
Кирпичная кладка	до 0,2	0,6—2,5
Бетон	0,1—0,7	1—9
Текстолит	15—30	30—40
Гетинакс	50—70	50—70

§ 12. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ ПРИ РАСЧЕТЕ НА ПРОЧНОСТЬ РАСТЯНУТЫХ (СЖАТЫХ) СТЕРЖНЕЙ

Определив напряжение в опасном сечении растянутого (сжатого) стержня по формуле (II.2) и установив допускаемое напряжение в соответствии с соображениями, изложенными выше, можно произвести оценку прочности стержня.

Для этого необходимо фактические напряжения в опасном сечении стержня сопоставить с допускаемыми:

$$\sigma = N/A \leq \sigma_{adm}. \quad (\text{II.20})$$

Здесь имеется в виду допускаемое напряжение или на растяжение, или на сжатие в зависимости от того, с каким случаем мы имеем дело — с растяжением или сжатием.

Неравенство (II.20) называется **условием прочности при растяжении (сжатии)**.

Пользуясь этим условием, можно решать следующие задачи:

1. **Проверять прочность стержня**, т. е. определять по заданной нагрузке и размерам поперечного сечения стержня фактические напряжения σ_{obs} и сравнивать их с допускаемыми. Фактические напряжения не должны отклоняться от допускаемых более чем на $\pm 5\%$. Перенапряжение больше этого значения недопу-

стимо с точки зрения прочности, а недонапряжение свидетельствует о перерасходе материала. Фактический запас прочности определяется как отношение $n = \sigma_y / \sigma_{obs}$ (для пластических материалов) или $n = \sigma_u / \sigma_{obs}$ (для хрупких материалов).

2. **Определять** (по известным нагрузке и допускаемому напряжению) **размеры поперечного сечения стержня**, требуемые по условию его прочности:

$$A \geq N / \sigma_{adm} \quad (II.21)$$

3. **Определять допускаемую продольную силу** по заданным размерам поперечного сечения стержня и известному допускаемому напряжению:

$$N_{adm} \leq A \sigma_{adm} \quad (II.22)$$

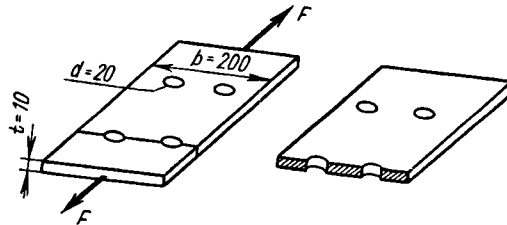


Рис. II.24

Определив допускаемую продольную силу и установив связь между продольной силой и нагрузкой (методом сечений), можно определить и допускаемую нагрузку.

Следует иметь в виду, что сжатые стержни кроме расчета на прочность в наиболее ослабленном сечении должны также рассчитываться на **устойчивость**, так как при определенном значении сжимающей силы может произойти выпучивание (продольный изгиб) сжатого стержня (см. гл. X).

Пример II.3. Определить допускаемую нагрузку растягиваемого стального листа, ослабленного отверстиями $d=20$ мм (рис. II.24). Допускаемое напряжение $\sigma_{adm}=160$ МПа, толщина листа $t=10$ мм, ширина $b=200$ мм.

Решение. Допускаемую нагрузку определяем из расчета на прочность по сечению, ослабленному отверстиями, так как здесь прежде всего может произойти разрушение. Полная площадь сечения листа

$$A_{br} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ см}^2.$$

Ослабление двумя отверстиями $\Delta A = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \text{ см}^2$. Рабочая площадь сечения

$$A_{nt} = A_{br} - \Delta A = 20 - 4 = 16 \text{ см}^2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Допускаемая нагрузка

$$F_{adm} = A_{nt} \sigma_{adm} = 16 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 256 \cdot 10^3 = 256 \text{ кН}.$$

Пример II.4. Подобрать сечение элементов системы, изображенной на рис. II.25, и определить перемещение узла *B*. Материал — сталь Ст3, $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$.

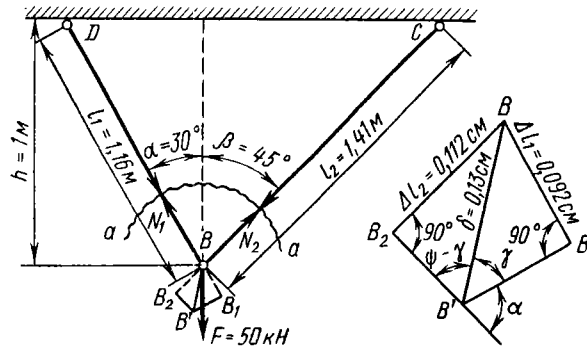


Рис. II.25

Решение. Применяя метод сечений, определяем усилия в стержнях, рассматривая часть системы ниже сечения *a—a*:

$$\sum X = 0; -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 45^\circ = 0, \text{ откуда } N_1 = N_2 \sqrt{2};$$

$$\sum Y = 0; N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 45^\circ - 50 = 0.$$

Решая два уравнения с двумя неизвестными, найдем

$$N_1 = 0,0368 \text{ МН} \text{ и } N_2 = 0,026 \text{ МН}.$$

Оба усилия растягивающие. Подбираем сечение элементов:

$$A_1 = N_1 / \sigma_{adm} = 0,0368 / 160 = 0,00023 \text{ м}^2 = 2,3 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = N_2 / \sigma_{adm} = 0,026 / 160 = 0,000162 \text{ м}^2 = 1,62 \text{ см}^2.$$

Определяем перемещение узла *B*. Вначале найдем удлинения стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 0,0368 \cdot 1,16 / (2 \cdot 10^5 \cdot 2,30 \cdot 10^{-4}) = 0,00092 \text{ м} = 0,092 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = 0,026 \cdot 1,41 / (2 \cdot 10^5 \cdot 1,62 \cdot 10^{-4}) = 0,00112 \text{ м} = 0,112 \text{ см}.$$

Для определения перемещения узла B применим графический способ. Из точек D и C проведем дуги радиусами, равными новым длинам стержней DB и BC (с учетом удлинений). Они пересекутся в точке B' — новом положении шарнира B . Вследствие малости деформаций дуги можно заменить прямыми линиями B_2B' и B_1B' , перпендикулярными направлениям BC и DB . Чтобы получить более точное решение, построение (диаграмму перемещений) выполняем в крупном масштабе (рис. П.25). Тогда отрезок BB' в принятом масштабе определит перемещение узла B .

В данном случае оно равно $\delta = 0,13$ см.

§ 13. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ) В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Для полного суждения о прочности материала необходимо уметь определять напряжения, действующие по любому наклонному сечению растянутого (сжатого) элемента (рис. П.26, а).

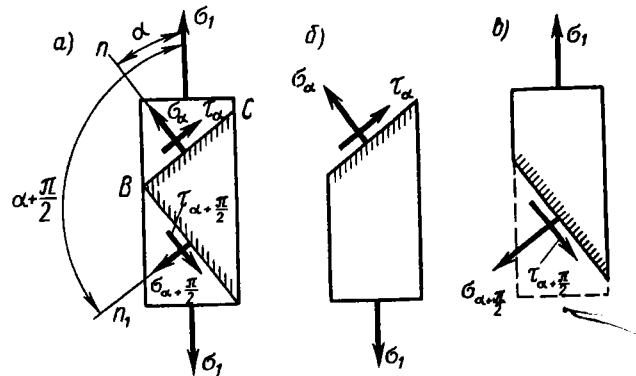


Рис. П.26

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня σ считаем известными (например, $\sigma_1 = N/A$).

Определим напряжения, возникающие в наклонном сечении BC , нормаль к которому повернута на угол α к направлению σ_1 . За положительное направление отсчетов угла α примем направление, обратное движению часовой стрелки.

Обозначим: A — площадь сечения, перпендикулярного оси стержня; A_α — площадь наклонного сечения, при этом

$$A_\alpha = A / \cos \alpha. \quad (П.23)$$

В общем случае в наклонном сечении могут действовать нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения. Их значения

найдем из условия равновесия отсеченной, например нижней, части (рис. II.26, б). Проецируем силы на направление σ_α :

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0.$$

Используя соотношение (II.23), найдем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha. \quad (II.24)$$

Проецируя силы на направление τ_α , получаем

$$\tau_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\tau_\alpha = 0,5 \sigma_1 \sin 2\alpha. \quad (II.25)$$

При положительном значении σ (т. е. растягивающем) и при $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ получим положительное значение для τ_α . Это означает, что касательное напряжение будет направлено так, как изображено на рис. II.26, б.

Данное направление касательного напряжения характеризуется тем, что внешнюю нормаль n к площадке для совпадения с касательным напряжением необходимо поворачивать по часовой стрелке.

Касательные напряжения такого направления принято считать положительными*.

Если же нормаль к площадке для совпадения с касательным напряжением необходимо поворачивать против часовой стрелки, то касательное напряжение считается отрицательным (рис. II.26, в).

Из формулы (II.24) следует, что максимального значения нормальные напряжения достигают при $\alpha = 0$, т. е. в сечении, перпендикулярном оси стержня.

Из формулы (II.25) следует, что при $\alpha = 0$ касательное напряжение равно нулю.

Из формул (II.24) и (II.25) видно, что при $\alpha = 90^\circ$ $\sigma = 0$ и $\tau = 0$.

Таким образом, в продольных сечениях нет ни нормальных, ни касательных напряжений.

Как уже было отмечено (см. § 6), площадки, на которых нет касательных напряжений, называются главными площадками, а нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, — главными напряжениями. Следовательно, нормальное напряжение в поперечном сечении растянутого или сжатого стержня есть главное напряжение. Поэтому оно обозначено σ_1 , по-

* В «Теории упругости» принимается другое правило знаков для касательных напряжений.

скольку индексы 1, 2, 3 принято присваивать только главным напряжениям (см. § 6).

Так как в данном случае отлично от нуля только одно главное напряжение, то рассматриваемое напряженное состояние является одноосным.

Из формулы (II.25) видно также, что максимальное касательное напряжение имеет место в сечении под углом $\alpha = 45^\circ$ и равно половине главного напряжения:

$$\tau_{\max} = \sigma_1/2. \quad (\text{II.26})$$

Именно в этих сечениях и начинаются первые сдвиги кристаллов, о чем свидетельствуют линии Людерса — Чернова (см. выше).

§ 14. ЗАКОН ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Определим нормальные и касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Для площадки, наклоненной под углом α , по формулам (II.24) и (II.25) имеем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = 0,5\sigma_1 \sin 2\alpha.$$

Для взаимно перпендикулярной площадки при значении угла $\alpha + \pi/2$ нормальные и касательные напряжения можно определить или непосредственно из условия равновесия верхней или нижней части стержня (рис. II.26, в), или по формулам (II.24) и (II.25) с заменой α на $\alpha + \pi/2$.

Применяя формулы (II.24) и (II.25), получим:

$$\sigma_{\alpha + \pi/2} = \sigma_1 \cos^2 (\alpha + \pi/2) = \sigma_1 \sin^2 \alpha, \quad (\text{II.27})$$

$$\tau_{\alpha + \pi/2} = 0,5\sigma_1 \sin 2 (\alpha + \pi/2) = -0,5\sigma_1 \sin 2\alpha. \quad (\text{II.28})$$

Анализируя полученные результаты, видим, что, во-первых,

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \pi/2} = \sigma_1,$$

т. е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам постоянна и равна главному напряжению; во-вторых,

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha + \pi/2}, \quad (\text{II.29})$$

т. е. на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют равные по величине и обратные по знаку касательные напряжения (закон парности или взаимности касательных напряжений).

При этом касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках направлены оба либо к ребру пересечения площадок, либо от ребра, как на рис. II.26, а.

Например, если изменить знак σ , то напряжения τ_α и $\tau_{\alpha+\pi/2}$ изменят свое направление на противоположное и будут оба направлены к ребру B пересечения площадок.

Закон парности (взаимности) касательных напряжений имеет силу не только для одноосного, но и для любого другого напряженного состояния: двухосного и объемного.

§ 15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ) В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

Рассмотрим более общий случай плоского (двухосного) напряженного состояния, когда отличны от нуля два главных напряжения σ_1 и σ_2 (рис. II.27, а).

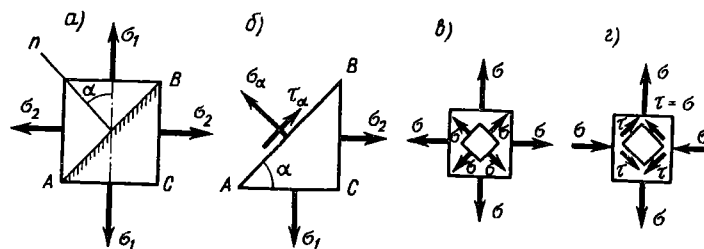


Рис. II.27

Как уже было отмечено в § 6, индексы у обозначений главных напряжений ставятся так, что соблюдается неравенство $\sigma_1 > \sigma_2$. Положительный угол α между направлением σ_1 и нормалью к произвольной площадке будет отсчитываться против часовой стрелки.

Между направлением напряжения σ_2 и площадкой угол равен $\alpha + \pi/2$.

Напряжения σ_α и τ_α в произвольном наклонном сечении можно или определить из условий равновесия трехгранной призмы ABC (рис. II.27, б), или вычислить по формулам (II.24) и (II.25), суммируя напряжения от действия σ_1 с напряжениями от действия σ_2 (при замене угла α на угол $\alpha + \pi/2$).

В результате получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 (\alpha + \pi/2), \text{ откуда}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha. \quad (\text{II.30})$$

Далее,

$$\tau_{\alpha} = 0,5\sigma_1 \sin 2\alpha + 0,5\sigma_2 \sin 2(\alpha + \pi/2), \text{ откуда}$$

$$\tau_{\alpha} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \quad (\text{II.31})$$

Из формулы (II.31) видно, что максимальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 \quad (\text{II.32})$$

и имеют место в сечениях, наклоненных под одним и тем же углом к направлениям σ_1 и σ_2 , т. е. при $\alpha = 45^\circ$. Это следует из условия, что τ_{\max} имеет место при $\sin 2\alpha = 1$.

Определив касательные напряжения на площадке, перпендикулярной площадке AB , убедимся, что и для двухосного напряженного состояния сохраняет свою силу закон парности касательных напряжений. В этом можно убедиться также по формуле (II.31), определив по ней значения τ_{α} и $\tau_{\alpha+90^\circ}$.

Частные случаи

1-й случай. Рассмотрим напряженное состояние при котором $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (рис. II.27, *в*).

В этом случае на всех площадках, проходящих через исследуемую точку, касательное напряжение τ_{α} равно нулю, а нормальное напряжение имеет одно и то же значение $\sigma_{\alpha} = \sigma$ [см. формулы (II.30) и (II.31)]. Такое напряженное состояние называется **равномерным двухосным растяжением** (или сжатием).

2-й случай. Рассмотрим напряженное состояние, представленное на рис. II.27, *г*, характеризующееся главными напряжениями $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_3 = -\sigma$. При этом $\sigma_2 = 0$.

Определим напряжения в сечениях, одинаково наклоненных к направлениям σ_1 и σ_3 , т. е. при $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$.

По формулам (II.30) и (II.31) получим $\sigma_{\alpha} = 0$; $\tau_{\alpha} = \pm \sigma$. Такое напряженное состояние называется **чистым сдвигом**.

§ 16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ПЛОЩАДОК

Рассмотрим обратную задачу. Даны нормальные и касательные напряжения, действующие по граням элемента (рис. II.28, *а*). Требуется определить положение главных площадок и значения главных напряжений. Рассмотрим равновесие трехгранной призмы с основанием DVC (рис. II.28, *б*). Примем, что $\sigma_{\alpha} > \sigma_{\beta}$. Угол ψ будем отсчитывать от направления большего напряже-

ния до нормали к площадке. За положительное направление отсчетов угла ψ примем направление против часовой стрелки. Площадь наклонной грани обозначим dA . Тогда площадь вертикальной грани будет $dA \sin \psi$, а горизонтальной — $dA \cos \psi$.

Проецируя все силы на направление σ_ψ , получим $\sigma_\psi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \psi) \cos \psi + (\tau dA \cos \psi) \sin \psi + (\tau dA \sin \psi) \cos \psi - (\sigma_\beta dA \sin \psi) \sin \psi = 0$. Проецируем теперь все силы на направление τ_ψ : $\tau_\psi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \psi) \sin \psi - (\tau dA \cos \psi) \cos \psi + (\tau dA \sin \psi) \sin \psi + (\sigma_\beta dA \sin \psi) \cos \psi = 0$.

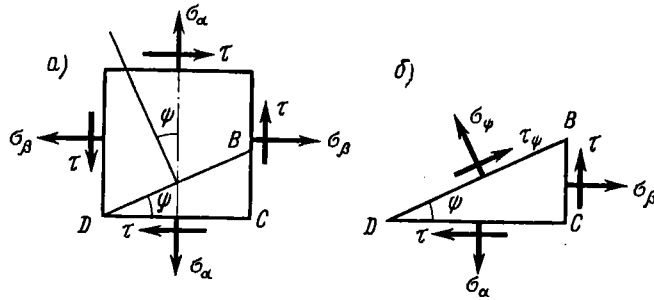


Рис. 11.28

Сократив на dA и введя функции двойных углов, получим:

$$\sigma_\psi = \sigma_\alpha \cos^2 \psi + \sigma_\beta \sin^2 \psi - \tau \sin 2\psi, \quad (11.33)$$

$$\tau_\psi = 0,5 (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\psi + \tau \cos 2\psi. \quad (11.34)$$

При изменении угла наклона площадки ψ величина σ_ψ будет непрерывно изменяться.

Чтобы отыскать положения главных площадок, т. е. площадок, на которых действуют экстремальные нормальные напряжения, следует либо приравнять нулю производную $d\sigma_\psi/d\psi$, либо приравнять нулю касательные напряжения τ_ψ , так как на главных площадках касательных напряжений нет.

В обоих случаях получаем следующую зависимость для определения угла ψ_0 наклона главных площадок:

$$0,5 (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\psi_0 + \tau \cos 2\psi_0 = 0$$

или

$$\left(\boxed{\operatorname{tg} 2\psi_0 = 2\tau / (\sigma_\beta - \sigma_\alpha)}. \right) \quad (11.35)$$

Для получения экстремальных значений нормальных напряжений, т. е. главных напряжений, значение угла из формулы

(II.35) подставим в формулу (II.33). Предварительно тригонометрические функции в формуле (II.33) следует выразить через тангенс двойного угла. Для этого используют известные формулы тригонометрии:

$$\sin 2\psi_0 = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\psi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0}}; \quad \cos 2\psi_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi_0}};$$

$$\cos^2 \psi_0 = 0,5 (1 + \cos 2\psi_0); \quad \sin^2 \psi_0 = 0,5 (1 - \cos 2\psi_0).$$

После несложных преобразований, которые необходимо сделать учащемуся самостоятельно, получим формулу для определения главных напряжений:

$$\left(\sigma_{\min}^{\max} = 0,5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm 0,5 \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right. \quad (II.36)$$

Если одно из заданных нормальных напряжений равно нулю, то формула (II.36) упростится и примет вид

$$\left(\sigma_{\min}^{\max} = 0,5\sigma \pm 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right. \quad (II.37)$$

Этой формулой будем пользоваться в дальнейшем при изучении изгиба и сложного сопротивления.

Исследуя вторую производную $d^2\sigma_\psi/d\psi^2$, можно убедиться, что на главной площадке под углом ψ_0 при принятых условиях ($\sigma_\alpha > \sigma_\beta$) действует максимальное главное напряжение, а на площадке под углом $\psi_0 + 90^\circ$ действует минимальное главное напряжение. Аналогичным образом можно найти экстремальные значения касательных напряжений, приравняв нулю производную $d\tau_\psi/d\psi = 0$.

В результате получим

$$\left(\tau_{\min}^{\max} = \pm 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right. \quad (II.37a)$$

Пример II.5. Определить значение и направление главных напряжений в случае напряженного состояния, показанного на рис. II.29.

Решение. По формуле (II.35) определяем положение главных площадок, перпендикулярных плоскости чертежа:

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{2 \cdot 100}{200 - 300} = -2;$$

$$2\psi_0 = -63^\circ 30';$$

$$\psi_0 = -31^\circ 45'.$$

Знак минус показывает, что ψ_0 отсчитывается от направления $\sigma_\alpha = 30$ МПа по часовой стрелке.

По формуле (II.36) получим

$$\sigma_{\max} = \frac{30+20}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(30-20)^2 + 4 \cdot 10^2} = 25 + 11,2 = 36,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = 25 - 11,2 = 13,8 \text{ МПа}.$$

В соответствии со сказанным выше σ_{\max} действует на площадке под углом ψ_0 , σ_{\min} — на площадке под углом $\psi_0 + 90^\circ$.

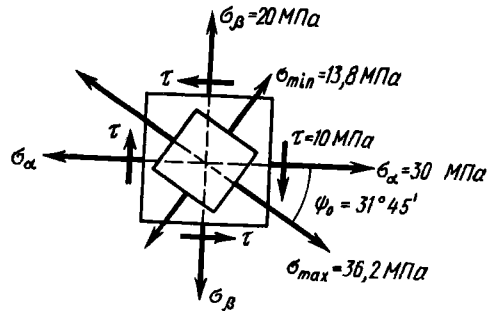


Рис. II.29

Пример II.6. Что изменится в предыдущем примере, если касательные напряжения будут направлены в противоположную сторону?

Отв. Так как касательное напряжение τ станет отрицательным, то изменится знак угла наклона главных площадок, он будет равен $\psi_0 = 31^\circ 45'$ (откладывается против часовой стрелки). Значения главных напряжений не изменятся.

§ 17. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ ПЛОСКОМ И ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ (ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА)

Определим деформации ϵ_1 и ϵ_2 в направлениях главных напряжений при плоском напряженном состоянии (рис. II.30). Для этого используем закон Гука для одноосного напряженного состояния [см. формулу (II.3)], а также зависимость (II.5) между продольной и поперечной деформациями и принцип независимости действия сил (принцип сложения деформаций).

От действия одного напряжения σ_1 относительное удлинение по вертикали равно

$$\epsilon_{11} = \sigma_1 / E$$

и одновременно в горизонтальном направлении относительное сужение равно

$$\varepsilon_{21} = -\nu\sigma_1/E.$$

От действия одного только σ_2 имели бы в горизонтальном направлении удлинение $\varepsilon_{22} = \sigma_2/E$ и в вертикальном направлении — сужение $\varepsilon_{12} = -\nu\sigma_2/E$.

Суммируя деформации, получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \sigma_1/E - \nu\sigma_2/E, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} = \sigma_2/E - \nu\sigma_1/E. \end{aligned} \right\} \quad (II.38)$$

Эти формулы выражают обобщенный закон Гука для плоского напряженного состояния.

Если известны деформации ε_1 и ε_2 , то, решая уравнения (II.38) относительно напряжений σ_1 и σ_2 , получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= E (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) / (1 - \nu^2), \\ \sigma_2 &= E (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) / (1 - \nu^2). \end{aligned} \right\} \quad (II.39)$$

Аналогично, для объемного (пространственного) напряженного состояния, когда все три главных напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 отличны от нуля, получим

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right. \quad (II.40)$$

Уравнения (II.40) представляют собой обобщенный закон Гука для объемного напряженного состояния. Деформации ε_1 , ε_2 и ε_3 в направлении главных напряжений называются **главными деформациями**.

Зная ε_1 , ε_2 и ε_3 , можно вычислить изменение объема при деформации. Возьмем кубик $1 \times 1 \times 1$ см. Объем его до деформации $V_0 = 1$ см³. Объем после деформации $V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \times (1 + \varepsilon_3) \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (произведениями ε , как величинами, малыми по сравнению с самими ε , пренебрегаем).

Относительное изменение объема

$$v = (V_1 - V_0) / V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (II.41)$$

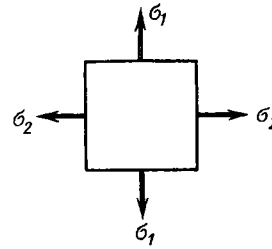


Рис. II.30

Подставив значения ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 из уравнений (II.40), получим

$$\nu = (1 - 2\nu) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / E. \quad (\text{II.42})$$

Из формулы (II.42) следует, что коэффициент Пуассона ν не может быть больше 0,5. Действительно, при трехосном растяжении, очевидно, объем элемента уменьшиться не может, т. е. ν положительно, а это возможно лишь при условии $1 - 2\nu \geq 0$, так как главные напряжения в этом случае положительны ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$).

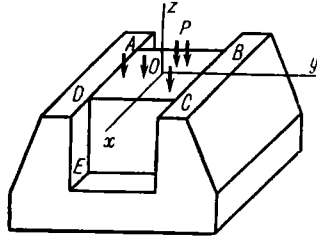


Рис. II.31

Формулы (II.38) — (II.42) выражают зависимость не только между главными деформациями и напряжениями, но и между любыми (неглавными) значениями этих величин, т. е. они остаются справедливыми и тогда, когда на площадках действуют также касательные напряжения.

Это следует из того, что линейные деформации (в направлениях, перпендикулярных τ) не зависят от касательных напряжений.

Пример II.7. Определить напряжения σ_x и σ_y , если деформации по этим направлениям равны $\epsilon_x = 0,001$, $\epsilon_y = -0,0008$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Решение. По формуле (II.39) имеем:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{2 \cdot 10^5}{1 - 0,3^2} \cdot (0,001 - 0,3 \cdot 0,0008) = 167,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{2 \cdot 10^5}{1 - 0,3^2} (-0,0008 + 0,3 \cdot 0,001) = -110,0 \text{ МПа}.$$

Пример II.8. Резиновый кубик ABCD свободно, но без зазоров вложен в стальную форму так, что две противоположные грани его свободны (рис. II.31). Сверху кубик подвергается давлению p . Определить напряжение σ_y , деформации ϵ_x и ϵ_z , а также относительное изменение объема. Модуль упругости резины — E , коэффициент Пуассона — ν . Трением между кубиком и стенками пренебречь. Стальную форму принять абсолютно жесткой (недеформируемой).

Решение. По обобщенному закону Гука имеем:

$$\epsilon_x = [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] / E;$$

$$\epsilon_y = [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] / E;$$

$$\epsilon_z = [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] / E.$$

По условию задачи, $\sigma_x=0$, $\sigma_z=-p$; $\varepsilon_y=0$. Используя эти условия, получаем

$$\sigma_y = -\nu p; \quad \varepsilon_x = \nu (\nu + 1) p/E;$$

$$\varepsilon_z = -(1 - \nu^2) p/E;$$

$$v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -(1 - 2\nu) (1 + \nu) p/E.$$

§ 18. РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ). ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

При растяжении (сжатии) внешние силы совершают работу вследствие перемещения точек их приложения (рис. II.32,а).

Вычислим работу статически приложенной внешней силы, т. е. такой силы, которая растет в процессе деформации от нуля до своего конечного значения с весьма небольшой скоростью.

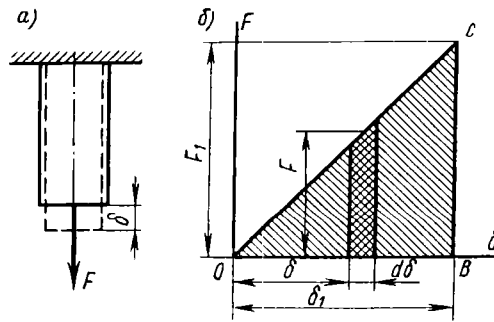


Рис. II.32

Элементарная работа dW^* внешней силы F на перемещении $d\delta$ равна

$$dW = Fd\delta. \quad (II.43)$$

Но между δ и F существует зависимость (закон Гука)

$$\delta = Fl/(EA), \text{ откуда } F = EA\delta/l.$$

Подставляя это значение в формулу (II.43), получаем

$$dW = EA\delta d\delta/l.$$

Полную работу силы получим, интегрируя это выражение в пределах от нуля до окончательного значения пе-

* *Work* (англ.) — работа.

ремещения δ_1 :

$$W = \frac{EA}{l} \int_0^{\delta_1} \delta d\delta = \frac{EA \delta_1^2}{2l} = \frac{F_1 \delta_1}{2}.$$

Таким образом,

$$W = 0,5 F_1 \delta_1, \quad (II.44)$$

т. е. работа внешней статически приложенной силы равна половине произведения окончательного значения силы на окончательную величину соответствующего перемещения.

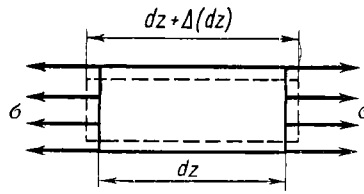


Рис. II.33

Графически работа силы F выражается (с учетом масштабов) площадью $OСВ$ диаграммы, построенной в координатах $\delta - F$ (рис. II.32, б).

Отметим, что работа силы F_1 , неизменной по значению, на перемещении δ_1 равна

$$W = F_1 \delta_1,$$

т. е. в два раза больше, чем при статическом действии.

При деформации совершают работу не только внешние силы, но и внутренние (силы упругости).

Работу внутренних сил при растяжении (сжатии) можно вычислить следующим образом.

На рис. II.33 показан элемент dz стержня, на который действуют нормальные напряжения σ , являющиеся для этого элемента внешними силами.

Внутренние силы, очевидно, будут направлены в противоположную сторону, т. е. в сторону, противоположную перемещению. Поэтому работа внутренних сил при нагружении всегда отрицательна.

Элементарная работа внутренних сил (для элемента dz) вычисляется по формуле, аналогичной формуле (II.44)*:

$$dW_i = -0,5 N \Delta (dz), \quad (II.45)$$

где N — внутреннее усилие (продольная сила); $\Delta (dz)$ — удлинение элемента.

Но, согласно закону Гука, имеем $\Delta (dz) = N dz / (EA)$. Следовательно,

$$dW_i = -N^2 dz / (2EA). \quad (II.46)$$

* Индекс i от *inside* (англ.) — внутренний.

Полную работу внутренних сил получим, интегрируя обе части формулы (II.46) по длине всего стержня l :

$$W_i = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2 dz}{EA}. \quad (\text{II.47})$$

Если N , E и A постоянны, то

$$W_i = -N^2 l / (2EA) = -EA \Delta l^2 / (2l), \quad (\text{II.48})$$

где $\Delta l = \delta = Nl / (EA)$ — удлинение стержня.

Величина, равная работе внутренних сил, но имеющая противоположный знак, называется потенциальной энергией деформации.

Она представляет собой энергию, накапливаемую телом при деформации.

Таким образом, для стержня постоянного сечения при продольной силе, имеющей одно и то же значение во всех поперечных сечениях, потенциальная энергия при растяжении (сжатии) определяется по формуле

$$U = -W_i = N^2 l / (2EA) = EA \Delta l^2 / (2l). \quad (\text{II.49})$$

Потенциальная энергия, отнесенная к единице объема материала, называется удельной потенциальной энергией:

$$u = U/V = U / (Al) = -N^2 l / (2EA^2 l) = \sigma^2 / (2E), \quad (\text{II.50})$$

$$\text{или } u = E\varepsilon^2 / 2 \quad (\text{так как } \sigma = E\varepsilon), \text{ или } u = \sigma\varepsilon / 2. \quad (\text{II.51})$$

При объемном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия получится как сумма трех слагаемых:

$$u = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) / 2. \quad (\text{II.52})$$

Используя обобщенный закон Гука, получаем

$$u = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] / (2E). \quad (\text{II.53})$$

Из этой формулы как частный случай, полагая одно из главных напряжений равным нулю, легко получить формулу для плоского напряженного состояния.

§ 19. СВОЙСТВА МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Отметим два важных свойства механической энергии, которые широко используются в современных методах расчета конструкций при любых деформациях: растяжении, кручении, изгибе и т. д.*

* Доказательство этих теорем можно найти в курсах теории упругости и строительной механики.

Закон сохранения механической энергии

При преобразовании энергии внешних сил в энергию внутренних сил и обратно имеет место закон сохранения энергии, который может быть сформулирован следующим образом:

Когда упругое тело (система) под влиянием какой-либо нагрузки переходит из недеформированного состояния в деформированное уравновешенное состояние, суммарная работа, произведенная в этом процессе внешними и внутренними силами, равна нулю:

$$W + W_i = 0, \quad (11.54)$$

где W — работа внешних сил (положительная при нагружении); W_i — работа внутренних сил (отрицательная при нагружении). Учитывая, что $W_i = -U$, уравнение (11.54) можно заменить равенством

$$W = U, \quad (11.55)$$

где U — потенциальная энергия деформации.

Этот закон сохраняет свою силу при медленном (статическом) нагружении и при упругих деформациях.

При динамическом нагружении и при появлении пластических деформаций часть энергии внешних сил преобразуется в кинетическую энергию движения тела, в электромагнитную, тепловую и другие виды энергии.

Закон сохранения энергии предоставляет в наше распоряжение одно уравнение, пользуясь которым можно определить одно неизвестное, например перемещение по направлению внешней силы или неизвестное усилие в одном из стержней.

Пример 11.9. Определить, пользуясь этим законом, вертикальное перемещение узла B (см. рис. 11.25).

Решение. Работа внешней силы F равна

$$W = F\delta_B/2,$$

где δ_B — неизвестное пока вертикальное перемещение узла B .

Потенциальная энергия деформации стержней DB и BC равна

$$U = (N_1^2 l_1 / A_1 + N_2^2 l_2 / A_2) / 2E.$$

На основании закона сохранения энергии имеем

$$F\delta_B/2 = (N_1^2 l_1 / A_1 + N_2^2 l_2 / A_2) / 2E.$$

Подставляя сюда известные величины $F = 50$ кН, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $N_1 = 36,8$ кН, $N_2 = 26,0$ кН, $l_1 = 116$ см, $l_2 = 141$ см, $A_1 = 2,30$ см² = $2,3 \cdot 10^{-4}$ м², $A_2 = 1,62 \cdot 10^{-4}$ м², получим $\delta = 0,124$ см.

Закон минимума потенциальной энергии деформации (принцип наименьшей работы)

Широкое применение в расчетах конструкций имеет энергетический закон, называемый **принципом наименьшей работы**:

Действительное напряженное состояние равновесия упругого тела (системы) отличается от всех смежных состояний равновесия тем, что оно дает минимум потенциальной энергии деформации.

Поэтому если потенциальная энергия деформации зависит от неизвестных величин, например усилий X_1 , X_2 и т. д., то можно определить все эти неизвестные из условий минимума энергии:

$$\partial U / \partial X_1 = 0; \quad \partial U / \partial X_2 = 0. \quad (11.56)$$

Принцип наименьшей работы справедлив для линейно-деформируемых (т. е. подчиняющихся закону Гука) упругих тел и систем. Он предоставляет в наше распоряжение любое нужное нам число уравнений (и притом линейных) для определения искомым неизвестных величин.

В следующем параграфе показывается применение этого принципа к расчету простейших статически неопределимых систем.

О других свойствах механической энергии будет сказано далее, в соответствующих параграфах курса.

§ 20. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Имеется много конструкций, в элементах которых усилия не могут быть определены только из уравнений равновесия.

Такие конструкции (системы) называются **статически неопределимыми**.

Рассмотрим, например, стержень, изображенный на рис. П.34.

Нагрузка F воспринимается частично верхней заделкой и частично нижней. Для определения двух реакций, возникающих в заделках, можно использовать только одно уравнение равновесия: равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось. Остальные два уравнения равновесия обращаются в тождества.

Так как неизвестных два, а уравнение равновесия одно, то потребуются составить одно дополнительное уравнение при рассмотрении деформации стержня или перемещения его сечений. Такие системы называются **системами один раз** (однажды) **статически неопределимыми**.

Системы, требующие составления двух уравнений перемещений, называются **дважды статически неопределимыми** и т. д.

Для решения рассматриваемой задачи поступим следующим образом. Отбросим одну заделку, например нижнюю, заменив ее действие на стержень неизвестной реакцией.

В полученной таким образом системе (обычно ее называют **основной системой**) приравняем нулю перемещение нижнего сечения, так как в заданной системе это сечение заделано и перемещаться не может. От действия силы R_B сечение $B-B$ будет

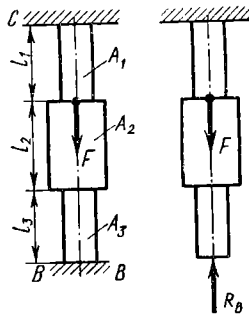


Рис. П.34

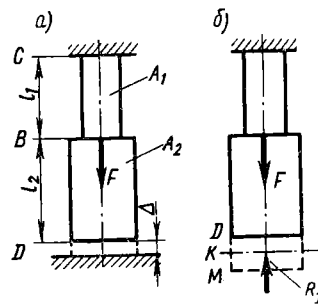


Рис. П.35

перемещаться вверх в результате укорочения всего стержня, а от действия силы F — вниз в результате удлинения верхней части стержня длиной l_1 , так как сила F при отброшенной нижней заделке передается на верхнюю заделку только через эту часть стержня.

Для определения деформаций используем закон Гука. Так как площадь сечения стержня разная на различных участках, то деформацию определяем по частям.

Уравнение перемещений имеет вид

$$-R_B l_3 / (EA_3) - R_B l_2 / (EA_2) - R_B l_1 / (EA_1) + F l_1 / (EA_1) = 0.$$

Первые три члена представляют собой перемещение вверх сечения $B-B$ под действием силы R_B , четвертый член — перемещение вниз сечения $B-B$ от действия силы F . Из этого уравнения находим R_B , после чего определение продольных сил в сечениях производится без затруднений по методу сечений, как показано в предыдущих параграфах.

Рассмотренный метод решения, когда за неизвестные принимаются усилия в отброшенных связях, называется **методом сил** (подробнее о методе сил см. § 65).

Пример П.10. Определить реакцию нижней заделки стержня, изображенного на рис. П.35, а.

Решение. Между нижним концом стержня и заделкой до приложения нагрузки имеется малый зазор Δ . В результате действия силы зазор закрывается и возникает реакция R_D . Для определения этой реакции отбросим нижнюю заделку, заменив ее действие на стержень силой R_D (рис. II.35, б). Составим уравнение перемещений. Отрезок MD изображает то перемещение, которое получило бы сечение под действием силы F при отсутствии заделки. Отрезок KM представляет перемещение сечения под действием реакции R_D .

Из чертежа видно, что

$$\overline{MD} = \overline{KM} + \Delta, \text{ но } \overline{MD} = Fl_1 / (EA_1);$$

$$\overline{KM} = R_D l_2 / (EA_2) + R_D l_1 / (EA_1).$$

Следовательно,

$$Fl_1 / (EA_1) - R_D l_2 / (EA_2) - R_D l_1 / (EA_1) = \Delta.$$

Из этого уравнения определяется R_D . Если R_D получится со знаком плюс, то это означает, что мы задались правильным направлением

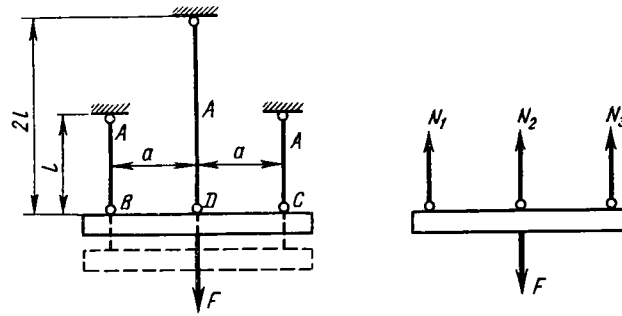


Рис. II.36

R_D , т. е. снизу вверх. Если получится отрицательное значение R_D , то это означает, что сила F недостаточна для закрытия зазора и для этого необходимо приложить к нижнему концу стержня силу R_D , направленную сверху вниз.

Следовательно, при отрицательном значении R_D задача сводится к определению усилий в поперечных сечениях стержня под действием одной силы F (статически определяемая задача).

Пример II.11. Определить допустимую нагрузку для системы стальных стержней, показанной на рис. II.36. Балка BC принимается абсолютно жесткой. Допускаемое напряжение равно σ_{adm} .

Решение. Для расчета таких систем, состоящих из нескольких стержней, обычно применяется другой способ, который может быть назван **способом сравнения деформации**.

Вначале, применяя метод сечений, выявляем неизвестные усилия, подлежащие определению, и составляем уравнения, какие можно составить для данной задачи.

В данном случае уравнений равновесия можно составить только два: приравнять нулю сумму проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на отсеченную часть, и приравнять нулю сумму моментов этих сил относительно какой-либо точки, например точки D . Приняв все усилия растягивающими, получим

$$1) \sum Y=0, N_1 + N_2 + N_3 - F=0;$$

$$2) \sum M_D=0; N_1 = N_3.$$

Из этих двух уравнений нельзя определить три неизвестных. Необходимо, следовательно, составить дополнительное уравнение, которое должно выразить условие совместности (неразрывности) деформаций элементов системы.

Чтобы составить уравнение совместности деформаций, необходимо представить систему в деформированном виде и непосредственно из чертежа (геометрически) установить зависимость между деформациями различных стержней (частей) системы.

Так, в данном случае после приложения нагрузки балка BC опустится вниз, оставаясь параллельной своему первоначальному положению (вследствие симметрии). Следовательно, удлинения всех стержней будут одинаковы:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3.$$

Это и есть уравнение совместности деформаций.

По закону Гука получим $N_1 l / (EA) = N_2 2l / (EA)$, откуда $N_2 = \frac{N_1}{2}$.

Подставляя значения N_2 и N_3 в уравнение равновесия 1, имеем

$$N_1 = N_3 = 0,4F, \quad (1)$$

$$N_2 = 0,2F. \quad (2)$$

Допускаемые значения F найдем, подставив в эти выражения значения допускаемых продольных сил $N_{adm} = A\sigma_{adm}$.

Из равенств (1) и (2) получим

$$F'_{adm} = 2,5\sigma_{adm}A; F''_{adm} = 5\sigma_{adm}A.$$

Очевидно, из двух нагрузок F_{adm} за допускаемую следует принять меньшую, т. е. $F_{adm} = F'_{adm} = 2,5\sigma_{adm}A$.

Таким образом, в данном примере допускаемая нагрузка лимитируется прочностью крайних стержней.

В более сложных случаях расчет статически неопределимых систем способом сравнения деформаций может представлять некоторые трудности и приводить к ошибочным результатам (см. пример II.12).

Поэтому для расчета статически неопределимых систем рекомендуется применять более строгие методы: метод сил или энергетический метод, основанный на принципе наименьшей работы.

Пример II.12. Определить усилия в стержнях системы (рис. II.37, а):

$$\alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ; A_1 = 3,14 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 3,14 \text{ см}^2; A_3 = 21,9 \text{ см}^2.$$

Решение. Применяем энергетический метод. Перерезаем один стержень, например нижний (рис. II.37, б). Усилие в нем примем растягивающим и обозначим X .

Определяем усилия в стержнях от действия усилия X (рис. II.37, в, г):

$$\sum Y = N_{1X} \sin 30^\circ - X \sin 45^\circ = 0,$$

$$N_{1X} = 1,414X \text{ (раст.)};$$

$$\sum X = -1,414X \cos 30^\circ - N_{2X} - X \cos 45^\circ = 0,$$

$$N_{2X} = -1,931X \text{ (сж.)}.$$

Определяем усилия в стержнях от нагрузки F (рис. II.37, д, е):

$$\sum Y = N_{1F} \sin 30^\circ - F = 0, N_{1F} = 2F \text{ (раст.)};$$

$$\sum X = -N_{1F} \cos 30^\circ - N_{2F} = 0,$$

$$N_{2F} = -1,732F \text{ (сж.)}.$$

Суммарные усилия:

$$N_1 = 2F + 1,414X; N_2 = -1,732F - 1,931X; N_3 = X.$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2E} \sum \frac{N_i^2 l_i}{A_i} = \frac{1}{2E} \left[\frac{(2F + 1,414X)^2 \cdot 139}{3,14} + \frac{(1,732F + 1,931X)^2 \cdot 120}{3,14} + \frac{X^2 \cdot 170}{21,9} \right].$$

Определяем значения усилия X из условия минимума потенциальной энергии деформации:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0;$$

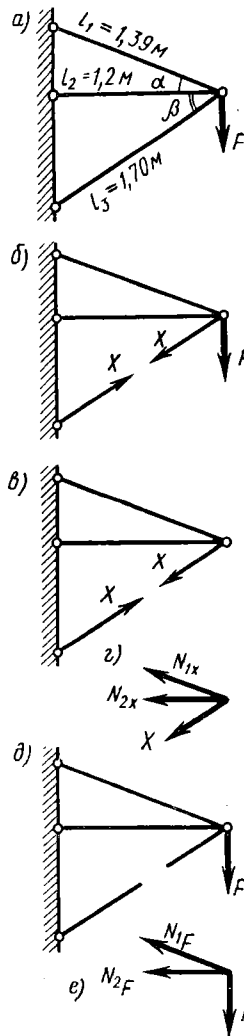


Рис. II.37

$$250,38F + 176,98X + 255,63F + 285,01X + 15,52X = 0,$$

откуда

$$X = N_3 = -1,059F \text{ (сж.)};$$

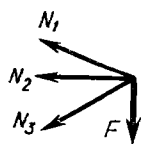
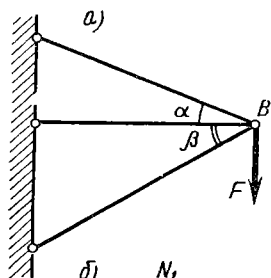
$$N_1 = 2F + 1,414(-1,059F) = 0,503F;$$

$$N_2 = -1,732F - 1,931(-1,059F) = 0,315F.$$

Решим эту же задачу способом сравнения деформаций. Принимая все усилия растягивающими, получаем два уравнения равновесия (рис. II.38, а, б):

$$\sum X = -N_1 \cos \alpha - N_2 - N_3 \cos \beta = 0;$$

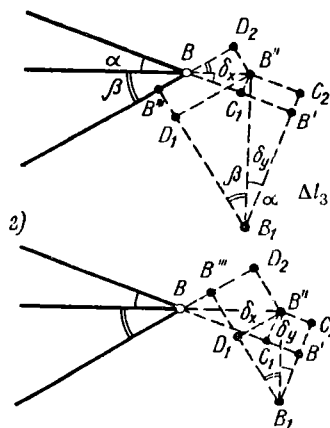
$$\sum Y = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \beta + F = 0.$$



Составляем уравнение деформаций (рис. II.38, в). Шарнир B перемещается в точку B_1 с координатами δ_x и δ_y . Вследствие малости деформаций стержней их можно считать равными проекциям перемещений узла B_1 на соответствующие первоначальные направления стержней.

Деформированное состояние принимаем таким, чтобы все стержни испытывали удлинение, так как все усилия приняты растягивающими (рис. II.38, б). Из чертежа видно (рис. II.38, в), что

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \overline{BB'} = \overline{BC_1} + \overline{B''C_2} = \\ &= \delta_x \cos \alpha + \delta_y \sin \alpha; \\ \Delta l_2 &= \overline{BB''} = \delta_x; \end{aligned}$$



$$\Delta l_3 = \overline{BB'''} = \overline{BD_2} - \overline{B'''D_2} = \delta_x \cos \beta - \delta_y \sin \beta.$$

Исключая δ_x и δ_y и переходя от деформаций к усилиям, получили бы

$$2,31N_1 - 2,732N_2 + 0,286N_3 = 0.$$

К этому следует добавить уравнения равновесия:

$$0,865N_1 + N_2 + 0,706N_3 = 0;$$

$$0,5N_1 - 0,706N_3 - F = 0.$$

Рис. II.38

Решая эти три уравнения, получим правильные значения:

$$N_1 = 0,503F; N_2 = 0,315F; N_3 = -1,059F \text{ (сж.)}.$$

Если бы мы приняли деформированное состояние на рис. II.38, а, которое не соответствует принятому напряженному (силовому) состоянию, так как третий (нижний) стержень испытывает укорочение, то получили бы

$$\Delta l_1 = \overline{BB'} = \overline{BC_1} + \overline{B''C_2} = \delta_x \cos \alpha + \delta_y \sin \alpha;$$

$$\Delta l_2 = \overline{BB''} = \delta_x;$$

$$\Delta l_3 = \overline{BB'''} = \overline{D_1B''} - \overline{BD_2} = \delta_y \sin \beta - \delta_x \cos \beta.$$

Отсюда, исключая δ_x и δ_y , получим

$$\Delta l_1 / \sin \alpha - \Delta l_3 / \sin \beta = (\cos \alpha / \sin \alpha + \cos \beta / \sin \beta) \Delta l_2$$

или в усилиях

$$N_1 l_1 / (EA_1 \sin \alpha) - N_3 l_3 / (EA_3 \sin \beta) - \\ - (\cos \alpha / \sin \alpha + \cos \beta / \sin \beta) N_2 l_2 / (EA_2) = 0.$$

Подставляя сюда числовые значения, получили бы

$$2,31N_1 - 2,732N_2 - 0,286N_3 = 0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнениями равновесия, получили бы неверные значения усилий:

$$N_1 = 0,4F; N_2 = 0,458F; N_3 = -1,14F \text{ (сж.)}.$$

Положение усугубляется тем, что на вид это решение кажется вполне правдоподобным: стержни 1 и 2, как и должно быть, растянуты, стержень 3 сжат*.

Из этого примера видно, что при решении статически неопределимых задач способом сравнения деформаций необходимо следить за тем, чтобы напряженное (силовое) состояние всегда соответствовало деформированному состоянию.

В рассмотренном примере можно было бы в качестве деформированного состояния принять состояние на рис. II.38, а, но тогда в силовом состоянии (рис. II.38, б) следовало бы усилие N_3 принять сжимающим.

* Подобного рода ошибки встречаются в некоторых учебниках и руководствах к решению задач сопротивления материалов. Данный пример с неверным решением заимствован нами из одного учебника.

В этом случае получили бы систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 0,865N_1 + N_2 - 0,706N_3 &= 0; \\ 0,5N_1 + 0,706N_3 - F &= 0; \\ 2,31N_1 - 2,732N_2 - 0,286N_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, получили бы верные значения усилий:

$$N_1 = 0,503F; \quad N_2 = 0,315F; \quad N_3 = 1,059F \text{ (сж.)}.$$

В некоторых системах нельзя принять такое деформирован-

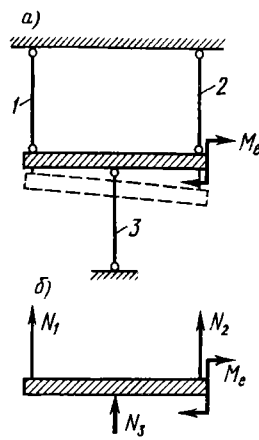


Рис. П.39

ное состояние, чтобы все стержни испытывали удлинения. В этих случаях решение задач способом сравнения деформаций лучше начинать с выбора деформированного состояния (рис. П.39). Например, можно принять деформированное состояние на рис. П.39, а, где стержни 1 и 2 удлиняются, а 3 — укорачивается, тогда напряженное состояние следует принять таким, чтобы усилия N_1 и N_2 были растягивающими, а усилие N_3 — сжимающим (рис. П.39, б).

Возможны и другие варианты, однако деформированное и напряженное состояния всегда должны соответствовать друг другу. В противном случае возможны ошибки, как в примере П.12.

§ 21. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ И МОНТАЖНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ИСКУССТВЕННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ УСИЛИЙ В КОНСТРУКЦИЯХ

Рассмотрим два стержня, из которых первый (рис. П.40, а) представляет систему статически определимую, а второй (рис. П.40, б) — статически неопределимую.

При нагревании на Δt стержень, заделанный одним концом, увеличит свои поперечные и продольные размеры (рис. П.40, а). Увеличение длины Δl_t , по известной из физики формуле, составит

$$\Delta l_t = \alpha \Delta t l,$$

где α — температурный коэффициент линейного расширения.

Так как никаких препятствий к удлинению стержня нет, то никакие внутренние усилия в нем не возникнут.

При нагревании на Δt стержня, заделанного двумя концами (рис. II.40, б), возникнет внутреннее сжимающее усилие, так как вторая заделка препятствует удлинению стержня.

Отсюда следует общее правило:

в статически определимых системах при изменении температуры возникают деформации без появления внутренних усилий; в статически неопределимых системах изменение температуры сопровождается появлением внутренних усилий.

Для определения последних применим обычный способ расчета статически неопределимых систем. Мысленно отбросим одну из заделок, например правую. Тогда стержень имеет возможность удлиняться на величину $\Delta l_t = \alpha \Delta t l$. Но реактивная сила X сжимает стержень на величину $\Delta l_x = Xl/(EA)$.

Фактическое перемещение правого крайнего сечения равно нулю, отсюда $\alpha \Delta t l = Xl/(EA)$ и, наконец,

$$X = EA\alpha\Delta t \text{ или} \\ \sigma_{tem} = X/A = E\alpha\Delta t. \quad (\text{II.57})$$

Формула эта справедлива только для стержня постоянного сечения.

Температурные напряжения σ_{tem} могут быть очень значительны.

Для их уменьшения в конструкциях предусматриваются специальные **температурные зазоры** (швы).

Кроме напряжений от действия температуры в статически неопределимых системах возникают напряжения при монтаже конструкции, вследствие того что отдельные стержни могут иметь отклонения от расчетной длины из-за неточности изготовления.

Рассмотрим, например, систему, представленную на рис. II.41. Предположим, что стержни изготовлены из одинакового материала и имеют одинаковую площадь сечения. Расстояния между стержнями также одинаковы, т. е. $DB = BC$. Пусть средний стержень имеет длину на отрезок δ меньше, чем требуется по геометрической схеме конструкции. (Для ясности дальнейших выкладок отрезок δ , обычно очень малый по сравнению с длиной стержня, изображен с большим преувеличением.) При

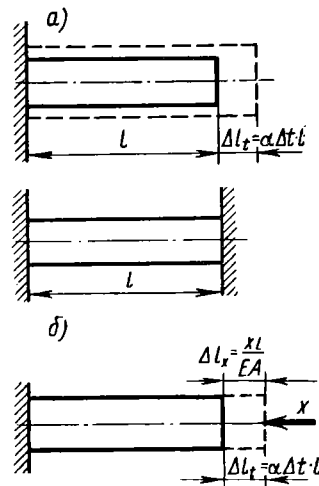


Рис. II.40

сборке системы придется средний стержень тем или иным способом натянуть, чтобы иметь возможность присоединить его к балке DVC (например, приварить). В результате после монтажа в стержнях системы возникнут какие-то усилия. Балка DVC после монтажа примет положение $D'B'C'$. Длина крайних стержней уменьшится, т. е. в них будут действовать сжимающие усилия, длина среднего стержня увеличится на отрезок OB' , т. е. в среднем стержне будет растягивающее усилие.

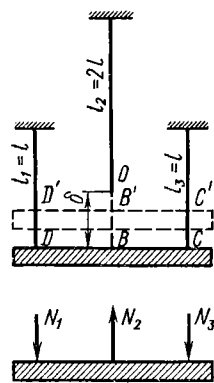


Рис. II.41

Для определения усилий в стержнях используем способ сравнения деформаций. Из условий равновесия получим: $\Sigma M_B = 0$, откуда $N_1 = N_3$; $\Sigma Y = 0$, откуда $N_2 = 2N_1$.

Из условия совместности деформаций имеем

$$-N_1 \alpha + N_2 \alpha = \overline{DD'} = \overline{BB'} = \overline{OB} - \overline{OB'},$$

$$N_1 = N_2.$$

$$\text{но } \overline{DD'} = \Delta l_1, \quad \overline{OB} = \delta, \quad \overline{OB'} = \Delta l_2,$$

следовательно, $\Delta l_1 = \delta - \Delta l_2$ или $N_1 l / (EA) = \delta - N_2 2l / (EA)$.

Подставляя сюда значение $N_2 = 2N_1$, получим:

$$N_1 = \delta EA / (5l), \quad N_2 = 2\delta EA / (5l).$$

Знак плюс перед значениями N_1 и N_2 показывает, что наши предположения об их направлении правильны, т. е. крайние стержни будут сжаты, а средний — растянут.

Если к этой системе приложить теперь нагрузку, например силу F в точке B , то усилия от этой нагрузки во всех стержнях будут растягивающими (см. пример II.11 и рис. II.36). Суммируя эти усилия с монтажными усилиями, получим:

$$N_1 = 2F/5 - \delta EA / (5l); \quad N_2 = F/5 + 2\delta EA / (5l).$$

Изменяя зазор δ , можно искусственно регулировать усилия и напряжения в статически неопределимых системах.

Можно δ выбрать таким, например, чтобы напряжения во всех стержнях системы были одинаковыми. Приравнявая $\sigma_1 = N_1/A = \sigma_2 = N_2/A$, получим для δ значение $\delta = Fl / (3EA)$.

При этом напряжения во всех стержнях будут одинаковы:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5F / (15A) = 0,33F/A.$$

В системе без регулирования усилий (рис. П.36) имели бы: напряжение в крайних стержнях

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 2F / (5A) = 0,4F/A;$$

напряжение в среднем стержне

$$\sigma_2 = F / (5A) = 0,2F/A.$$

Сравнивая эти результаты, видим, что за счет искусственного натяжения среднего стержня удалось снизить расчетное напряжение с $0,4 F/A$ до $0,33 F/A$.

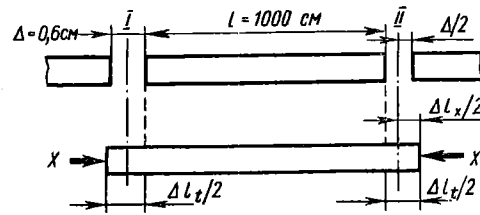


Рис. П.42

В последние годы идея искусственного регулирования усилий получает все более и более широкое применение в различных конструкциях, особенно в железобетонных (предварительно напряженный железобетон).

Искусственно натянутая до бетонирования арматура после укладки и затвердения бетона освобождается от натяжных приспособлений и создает в железобетонном элементе напряженное состояние, обратное тому, которое будет вызвано в нем нагрузкой. Особенно важно уменьшить растягивающие напряжения в бетоне, так как бетон плохо сопротивляется действию растягивающих напряжений.

В настоящее время в СССР (и в других странах мира) осуществляется массовое производство предварительно напряженного железобетона как для строительных конструкций, так и (в меньшей мере) для машиностроения (станины тяжелых машин и т. п.).

Пример П.13. Определить напряжения, возникающие в стальных рельсах (трамвайных или железнодорожных) летом при $t = 30^\circ\text{C}$, если рельсы были уложены без зазоров, зимой при $t = -30^\circ\text{C}$. Для стали $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{град}}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение. По формуле (П.57) получим при $\Delta t = 60^\circ$, $\sigma_{тем} = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 60 = 150 \text{ МПа}$, что близко к допускаемым напряжениям для малоуглеродистой стали.

Пример П.14. Определить напряжения в том же рельсе, если через каждые 10 м предусмотрены зазоры $\Delta = 6 \text{ мм}$ (рис. П.42).

Решение. Если бы не было препятствий со стороны соседних рельсов, удлинение рассматриваемого рельса от нагревания было бы $\Delta l_t = \alpha l \Delta t$.

Возникающая после закрытия зазора (когда длина рельса будет равна $l + \Delta$, т. е. расстоянию между линиями I и II) реактивная сила X сжимает рельс на величину $\Delta l_x = Xl / (EA) = \sigma_{tem} l / E$. Из чертежа видно, что $\Delta l_t = \Delta l_x + \Delta$. Подставляя в это выражение значения Δl_t , Δl_x и Δ , находим $\sigma_{tem} = 30$ МПа. Следовательно, небольшой зазор значительно уменьшил температурные напряжения. Легко проверить, что при зазоре 7,5 мм напряжения σ_{tem} будут равны нулю.

§ 22. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Напряжения по поперечному сечению растянутого (сжатого) стержня распределены равномерно только в некотором удалении от места приложения силы и при условии, что поперечные размеры стержня по его длине не изменяются совсем или изменяются очень плавно. Если же контур продольного сечения стержня резко изменяется, то в местах нарушения призматической или цилиндрической формы стержня распределение напряжений по его поперечному сечению уже не будет равномерным.

Это явление значительного повышения напряжений в местах резкого изменения геометрической формы стержня называется **концентрацией напряжений**. Определение напряжений в местах концентрации производится экспериментально или методами теории упругости.

В качестве примера на рис. II.43 приведены результаты решения задачи для широкой полосы с небольшим отверстием, подвергающейся равномерному растяжению. Максимальное напряжение у края отверстия σ_{max} в три раза больше среднего (номинального), вычисленного по формуле $\sigma = F/A$.

Для широкой полосы с небольшими полукруглыми ослаблениями по краям максимальное напряжение в два раза больше номинального.

Отношение максимального местного напряжения к номинальному называется **теоретическим коэффициентом концентрации напряжений**

$$\alpha_\sigma = \sigma_{max} / \sigma_{nom}. \quad (II.58)$$

Под **номинальным** σ_{nom} понимается напряжение, которое определяют по формулам сопротивления материалов без учета эффекта концентрации. Например, для полосы с отверстием $\sigma_{nom} = F/A$, где A — площадь ослабленного сечения.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений, определяемый в предположении, что материал при деформации следует закону Гука, во многих случаях не дает правильного представления о влиянии концентрации напряжений на прочность детали. Если бы материал вплоть до разрушения следовал закону Гука, то прочность детали при наличии концентрации напряжений была бы меньше прочности подобной детали без очагов концентрации в α_σ раз. Опыты показывают, что для

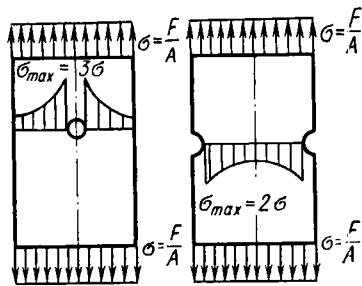


Рис. II.43

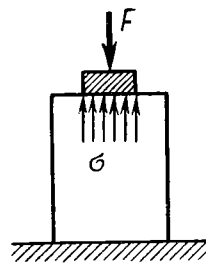


Рис. II.44

большинства материалов снижение прочности при наличии концентрации напряжений получается меньше чем в α_σ раз. Это снижение определяется экспериментально как отношение предела прочности σ_u детали без концентрации напряжений к пределу прочности $\sigma_{u,k}$ детали, имеющей заданный концентратор напряжений:

$$K_\sigma = \sigma_u / \sigma_{u,k} \quad (II.59)$$

Коэффициент K_σ называется **эффективным коэффициентом концентрации напряжений**. Значения K_σ приводятся в справочниках.

Опыты показывают, что при статических нагрузках для деталей из пластичных материалов практически $K_\sigma = 1$, т. е. для таких нагрузок концентрация напряжений должна учитываться лишь при расчете деталей из хрупких или малопластичных материалов.

При действии переменной нагрузки (расчет на выносливость) концентрация напряжений учитывается для всех материалов.

Высокие местные напряжения возникают также в местах передачи давления от одного тела другому. Если начальный контакт тел происходит в одной точке или по линии, напряжения называют **контактными**, если начальный контакт происходит по некоторой площадке конечных размеров, принято говорить о напряжениях **смятия** (рис. II.44).

В результате деформации контактирующих тел начальный точечный или линейный контакт переходит в контакт по некоторой малой площадке.

Давление, передаваемое от одной детали к другой, распределено по контактной площадке неравномерно.

Определение контактных напряжений и деформаций производится методами теории упругости.

Задача эта решается при следующих допущениях: а) материалы соприкасающихся деталей подчиняются закону Гука; б) линейные размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся поверхностей; в) сжимающая сила направлена по нормали к площадке контакта; г) на поверхности контакта возникают только силы давления, нормальные к этой поверхности.

При этих допущениях, как доказывается в теории упругости, силы давления по площадке контакта распределяются по закону поверхности эллипсоида, а площадка контакта в общем случае имеет форму эллипса. Максимальное давление имеет место в центре площадки контакта.

Приведем без вывода некоторые расчетные формулы для частных случаев контактной деформации. Модули упругости контактирующих тел приняты одинаковыми, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

При взаимном давлении двух упругих шаров с диаметрами d_1 и d_2 (рис. II.45) образуется круглая площадка контакта, радиус которой a может быть определен по формуле

$$a = 0,88 \sqrt[3]{Fd_1d_2/[E(d_1 + d_2)]}. \quad (II.60)$$

Максимальное давление, а следовательно, и сжимающее напряжение у поверхности контактирующих тел в центре площадки определяется по формуле

$$\sigma_{\max} = 0,62 \sqrt[3]{FE^2 [(d_1 + d_2)/(d_1d_2)]^2}. \quad (II.61)$$

Формула (II.61) справедлива и для случая, когда шар диаметром d_1 лежит на вогнутой шаровой поверхности диаметром d_2 (рис. II.46), только в этом случае следует d_2 взять с обратным знаком. В результате получим

$$\sigma_{\max} = 0,62 \sqrt[3]{FE^2 [(d_1 - d_2)/(d_1d_2)]^2}. \quad (II.62)$$

По сравнению с предыдущим случаем напряжения получаются меньшими.

В случае давления шара на плоскость напряжения опреде-

ляют по формуле (II.62), если положить в ней d_2 бесконечно большим:

$$\sigma_{\max} = 0,62 \sqrt[3]{FE^2/d^2}. \quad (\text{II.63})$$

Для пластичных материалов наиболее опасны не нормальные напряжения, а касательные. Наибольшие касательные напряжения для рассмотренного случая имеют место в точке,

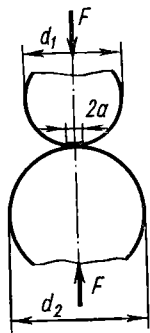


Рис. II.45

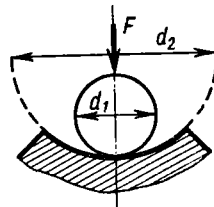


Рис. II.46

расположенной на глубине, примерно равной половине радиуса контактной площадки. Они равны

$$\tau_{\max} = 0,31 \sigma_{\max}. \quad (\text{II.64})$$

При контакте цилиндрических тел с параллельными образующими (длина которых принимается бесконечно большой) максимальное напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{\max} = 0,59 \sqrt[3]{qE (d_1 + d_2) / (d_1 d_2)}, \quad (\text{II.65})$$

где q — нагрузка, равномерно распределенная по длине цилиндров.

Изменив в формуле (II.65) знак при d_2 на обратный, получим напряжение в случае давления цилиндра на вогнутую цилиндрическую поверхность.

Наибольшие касательные напряжения имеют место в точке, лежащей на глубине, равной $0,4a$ (a — ширина площадки контакта). Они равны

$$\tau_{\max} = 0,31 \sigma_{\max}.$$

Для других случаев формулы определения контактных напряжений приводятся в справочниках.

Из приведенных формул видно, что зависимость между нагрузкой и контактным напряжением — нелинейная.

Если размеры площадки контакта сопоставимы с радиусом кривизны соприкасающихся поверхностей, то приведенные выше формулы неприменимы. С такой задачей встречаются, например, при определении давления между поверхностью тела болта (или заклепки) и цилиндрической поверхностью отверстия. В этих случаях теоретическое решение получается весьма сложным и для проверки прочности материала в зоне площадки контакта пользуются обычно приближенными методами расчета, основанными на экспериментах.

Например, при расчете заклепок и болтов принимают, что напряжения по площадке контакта (смятия) распределяются равномерно, а допускаемые напряжения принимают на основании опытных данных в 2—2,5 раза больше, чем допускаемые напряжения на сжатие.

Эти напряжения обычно называют **напряжениями смятия**, а не контактными, хотя первоначальный контакт между заклепкой и листом происходит по линии.

В табл. II.6 приведены значения допускаемых контактных напряжений для некоторых марок сталей при первоначальном точечном контакте*.

Т а б л и ц а II.6

Марка стали	Предел текучести $\sigma_{0,2}$, МПа	Предел прочности σ_u , МПа	Допускаемое максимальное напряжение на площадке σ'_{con} , МПа
30	300	480	1200
40	350	570	1400
50	380	630	1450
50Г	400	700	1550
20Х	400	700	1550

Как видим, значения допускаемых контактных напряжений значительно больше предела текучести и даже временного сопротивления.

В гл. VIII будет показано, что при таких высоких значениях контактных напряжений в контактирующих телах будут возникать пластические деформации, которые могут быть допущены только при действии статической нагрузки.

* Индекс *con* от *contact* (англ.) — контакт.

§ 23. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Если на гранях элемента действуют только касательные напряжения (рис. III.1), то такой вид напряженного состояния называется **чистым сдвигом** (см. также § 15). Площадки, по которым действуют только касательные напряжения, называются **площадками чистого сдвига**.

Примером тела, во всех точках которого имеет место чистый сдвиг, является скручиваемый стержень круглого сечения (см. дальше).

Кроме расчетов на прочность при чистом сдвиге на практике весьма часто производят расчеты на прочность по касательным напряжениям независимо от того, по каким площадкам они действуют: по площадкам чистого сдвига или по любым другим площадкам. Такие расчеты называются **расчетами на сдвиг** или **срез** (для дерева и бетона применяется также термин **скалывание**). Примером соединений, рассчитываемых на срез, являются заклпочные, болтовые и сварные соединения.

Несмотря на ряд упрощений, принимаемых при этом, расчеты на срез, как показывает практика, являются вполне надежными.

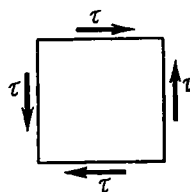


Рис. III.1

§ 24. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

Напряженное состояние при чистом сдвиге можно исследовать с помощью формул, приведенных в § 16, полагая в них σ_x и σ_y равными нулю.

В частности, можно показать, что при чистом сдвиге главные напряжения получаются равными по значению и противоположными по знаку: $\sigma_{\max/\min} = \pm \tau$, т. е. одно главное напряжение — растягивающее, другое — сжимающее (рис. III.2).

Так как отличны от нуля два главных напряжения, то сдвиг представляет собой частный случай двухосного напряженного состояния.

Из формулы (II.35) следует, что главные площадки наклонены под углом 45° к направлению площадок чистого сдвига (рис. III.2). Действительно, при $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$ получим $\operatorname{tg} 2\psi_0 = \infty$, следовательно, $\psi_0 = 45^\circ$.

Рассмотрим теперь деформации при сдвиге.

Элемент $KBCD$, прямоугольный до деформации (рис. III.3, а), после деформации сдвига примет вид $KB'C'D$ (грань KD считаем закрепленной).

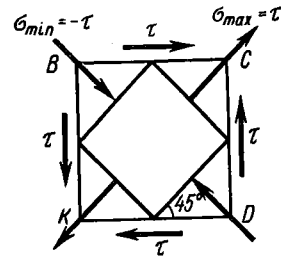


Рис. III.2

Угол γ_1 называется **угловой деформацией** или **углом сдвига**.

Опыты показывают, что для многих материалов до известных пределов нагружения между напряжениями и деформациями при сдвиге имеет место линейная зависимость

$$\gamma = \tau / G, \quad (\text{III.1})$$

которая выражает закон Гука при сдвиге. Постоянную G называют **модулем сдвига (модулем упругости второго рода)**; он характеризует способность материала сопротивляться деформации сдвига.

Линейная зависимость между τ и γ справедлива до тех пор, пока касательные напряжения не превзойдут предела пропорциональности при сдвиге. Из формулы (II.42) видно, что при чистом сдвиге объемная деформация ν равна нулю, так как $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$.

Из свойства взаимности касательных напряжений легко установить свойство взаимности угловых деформаций. Действительно, если закрепить грань KD (рис. III.3, а), то получим для угла сдвига

$$\gamma_1 = \tau / G. \quad (\text{III.1a})$$

Закрепив теперь грань KB' (рис. III.3, б), получим для угла γ_2

$$\gamma_2 = \tau / G. \quad (\text{III.1б})$$

Так как равны правые части, то равны и левые, т. е.

$$|\gamma_1| = |\gamma_2|. \quad (\text{III.1в})$$

Следовательно, **угловые деформации двух взаимно перпендикулярных площадок равны по значению и противоположны по знаку (свойство взаимности угловых деформаций)**.

Таким образом, картина перемещений элемента 1234 в результате линейных и угловых деформаций представлена на рис. III.3, z .

Можно представить, что сначала элемент 1234 , как абсолютно жесткий, перемещается в положение $1'2'3'4'$, поворачиваясь на угол α . Затем в результате линейных деформаций происходит

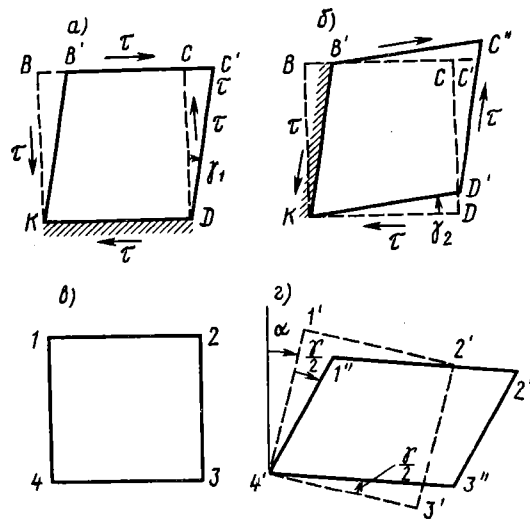


Рис. III.3

удлинение сторон 12 и 43 и укорочение сторон 14 и 23 . В результате угловых деформаций происходит поворот сторон $1'4'$ и $4'3'$ на равные по величине и противоположные по знаку углы γ , так что окончательно элемент 1234 будет занимать положение $4'1''2''3''$ (рис. III.3, z).

§ 25. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ СДВИГЕ. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ТРЕМЯ УПРУГИМИ ПОСТОЯННЫМИ E , G и ν

Вычислим потенциальную энергию при сдвиге. Для простоты предположим, что грань KD элемента неподвижна (рис. III.3). Тогда при смещении верхней грани сила $\tau \delta dx$ (где δ — толщина элемента) совершит работу на перемещении γdy . Следовательно, потенциальная энергия деформации, накопленная в элементе, $dU = \tau \gamma \delta dx dy / 2$.

Удельная потенциальная энергия

$$u = dU/dV = \tau \gamma / 2.$$

Выразив γ через τ по закону Гука (III.1), получим

$$u = \tau^2 / (2G). \quad (III.2)$$

Множитель $1/2$ принят потому, что сила прямо пропорциональна смещению.

С другой стороны, потенциальная энергия может быть выражена через главные нормальные напряжения. Из формулы (II.53) для плоского напряженного состояния, каким является чистый сдвиг, полагая $\sigma_2 = 0$, получаем

$$u = (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_3) / (2E). \quad (III.3)$$

Но главные напряжения при сдвиге равны $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$, следовательно,

$$u = \tau^2 (1 + \nu) E. \quad (III.4)$$

Так как энергия не должна зависеть от ориентировки граней элемента, то, приравняв правые части выражений (III.2) и (III.4), получаем

$$\tau^2 / (2G) = \tau^2 (1 + \nu) / E.$$

Отсюда найдем зависимость между модулем сдвига G и модулем упругости первого рода E :

$$G = E / [2(1 + \nu)]. \quad (III.5)$$

Для стали модуль сдвига $G = 2 \cdot 10^5 / [2(1 + 0,3)] \approx 8 \cdot 10^4$ МПа.

§ 26. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА СДВИГ

Рассмотрим основы практических методов расчета на сдвиг (срез) заклепочных и сварных соединений. Более подробно эти вопросы освещаются в курсах деталей машин и стальных конструкций.

На рис. III.4, а показано соединение двух листов заклепками (соединение внахлестку). Картина возможного разрушения заклепочного соединения показана на рис. III.4, б.

Соединение разрушается в результате перерезывания заклепок по линии соприкосновения листов.

Если разрушение каждой заклепки происходит по одной плоскости среза, то заклепочное соединение называется **односрезным** (рис. III.4), если по двум плоскостям, то соединение называется **двухсрезным** (рис. III.5), и т. д.

Учитывая большие трудности, связанные с определением действительного напряженного состояния материала заклепки

в зоне разрушения, для упрощения задачи принимаем, что по плоскостям среза действуют только касательные напряжения.

Далее возникает вопрос: как распределяется сила F между отдельными заклепками, т. е. нагружены ли все заклепки одинаково?

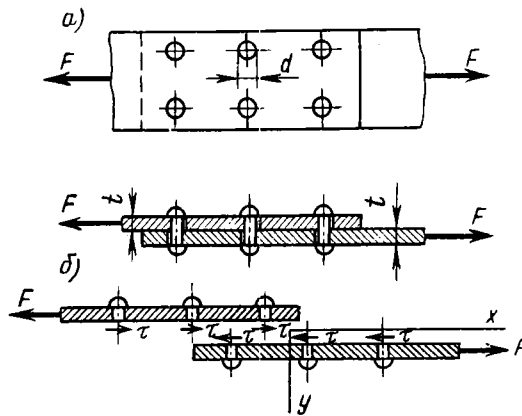


Рис. III.4

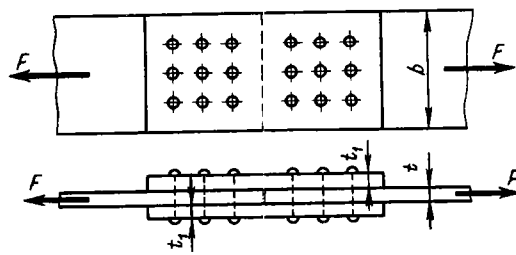


Рис. III.5

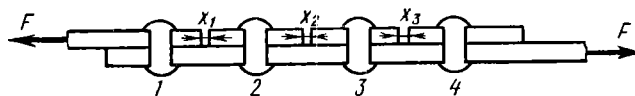


Рис. III.6

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что заклепки (вдоль действия силы) нагружены неодинаково.

Если рассчитать заклепочное соединение как статически неопределимую систему, приняв, например, основную систему по рис. III.6, то для поперечных сил в заклепках $Q_3 = X_3 - X_2$ и т. д. получим результаты, представленные в табл. III.1 (зада-

ча решена в предположении, что площадь склепываемых листов одинакова).

Как видим, с увеличением числа заклепок в ряду неравномерность в их работе увеличивается.

При шести заклепках перерезывающие силы в крайних заклепках (первой и шестой) почти в 2,5 раза больше, чем в средних заклепках (третьей и четвертой).

В тех случаях, когда стыкуются элементы с различной площадью поперечного сечения, неравномерность в работе заклепок увеличивается. При этом наиболее перенапряженными оказываются заклепки со стороны листа, имеющего меньшую площадь сечения.

Однако опыты показывают, что при действии статической нагрузки заклепки разрушаются одновременно. Это объясняется тем, что к моменту разрушения происходит выравнивание усилий в заклепках вследствие пластичности материала и за счет зазоров между заклепками и листами.

При действии же ударных и вибрационных нагрузок неравномерность работы заклепок необходимо учитывать.

Итак, при действии статической нагрузки можно принимать, что поперечная сила в каждой заклепке равна

$$Q = F/n, \quad (III.6)$$

где F — сила, действующая на соединение; n — число заклепок.

Т а б л и ц а III.1

Число заклепок	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	$Q_{ср}$
	(в долях от F)						
3	0,353	0,294	0,353	—	—	—	0,333
4	0,29	0,21	0,21	0,29	—	—	0,25
5	0,26	0,17	0,14	0,17	0,26	—	0,20
6	0,24	0,15	0,11	0,11	0,15	0,24	0,166

Далее принимают, что касательные напряжения по плоскости среза распределяются равномерно, хотя в действительности, как показывают экспериментальные исследования, распределение их не является равномерным. Однако строго теоретическое решение этого вопроса затруднительно, тем более что имеются зазоры между заклепками и листами, силы трения между листами и т. д. Кроме того, для изготовления заклепок применяют наиболее пластичные марки сталей, а поэтому неравномерность в распределении касательных напряжений из-за возникновения пластических деформаций к моменту разрушения исчезает.

Приняв равномерное распределение касательных напряжений по сечению заклепки, легко найдем их значение.

Составляя уравнение равновесия отсеченной части соединения, например верхней (см. рис. III.4, б), получаем

$$\sum X = 0, \quad -F + n\tau A = 0, \quad \text{откуда } \tau = F/(nA), \quad (\text{III.7})$$

где $A = \pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения заклепки диаметром d .

Используя формулу (III.6), получим из (III.7)

$$\tau = Q/A. \quad (\text{III.8})$$

Условие прочности заклепок на срез имеет вид

$$\tau = F/(An) = Q/A \leq \tau_{adm}, \quad (\text{III.9})$$

где τ_{adm} — допускаемое касательное напряжение (допускаемое напряжение на срез).

Из формулы (III.9) легко определить необходимое число односрезных заклепок:

$$n \geq F/(\pi d^2/4) \tau_{adm}. \quad (\text{III.10})$$

При двухсрезном или многосрезном заклепочном соединении вместо n в формулу (III.9) следует подставлять общее число срезов заклепок, расположенных по одну сторону стыка.

Отверстия в склепываемых листах имеют диаметр на 0,5—1 мм больше диаметра еще не поставленной заклепки. В расчетные формулы входит диаметр отверстия, так как в выполненном соединении заклепка практически полностью заполняет отверстие.

Допускаемые касательные напряжения обычно устанавливаются опытным путем, чтобы выявить влияние на прочность соединения неравномерности в распределении напряжений, влияние сил трения, зазоров и т. п. При расчете заклепок принимают $\tau_{adm} = (0,6 \div 0,8) \sigma_{adm}^t$, где σ_{adm}^t — допускаемое напряжение на растяжение.

Волокнистые материалы (например, дерево), являющиеся весьма неоднородными и анизотропными, обладают, по опытным данным, весьма малым сопротивлением сдвигу (скалыванию) вдоль волокон. Например, для сосны при сдвиге вдоль волокон принимают $\tau_{adm} = 0,1 \sigma_{adm}^t$.

Кроме расчета на срез заклепочные соединения рассчитывают также на смятие. Проверяют напряжения смятия по площади соприкосновения соединяемых листов и заклепок. Проекция площадок смятия на плоскость чертежа показаны на рис. III.4, а двойными линиями. Площадь смятия одной заклепки принимают равной $A_{con} = dt$.

В случае склепывания внахлестку двух листов различной толщины при подсчете A_{con} надо принимать t_{min} . Для соединения встык с двумя накладками (см. рис. III.5) следует под t понимать толщину соединяемых листов, если она не превышает $2t_1$, где t_1 — толщина одной накладки; в противном случае (при $2t_1 < t$) следует принимать $A_{con} = 2dt_1$.

Напряжения смятия считают равномерно распределенными по площади смятия и условие прочности на смятие выражают формулой

$$F / (n' A_{con}) \leq \sigma'_{con}, \quad (III.11)$$

где σ'_{con} — допускаемое напряжение на смятие; n' — число заклепок.

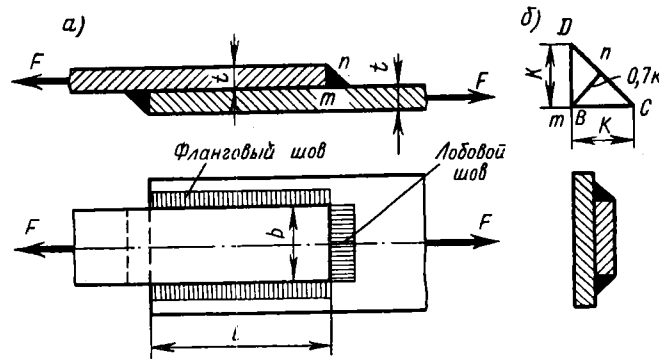


Рис. III.7

При сверленных или продавленных, а затем рассверленных отверстиях принимают $\sigma'_{con} = 2\sigma'_{adm}$.

Из формулы (III.11) можно определить необходимое число заклепок по условию прочности на смятие:

$$n' \geq F / (dt\sigma'_{con}). \quad (III.12)$$

Из двух величин n и n' принимают большую.

Пользуясь формулой $\tau = Q/A$, рассчитывают также сварные соединения, в последние годы все больше вытесняющие заклепочные. На рис. III.7, а показано соединение двух листов внахлестку лобовыми и фланговыми швами. При расчете как лобовых, так и фланговых сварных швов принимают, что опасное сечение шва совпадает с плоскостью, проходящей через биссектрису mn прямого угла DBC (рис. III.7, б). Таким образом, для одного лобового шва площадь опасного сечения равна $b \cdot 0,7 k$, а для одного флангового шва — $l \cdot 0,7 k$, где k — катет шва; в случае,

представленном на рис. III.7, катет шва равен толщине t листа. Касательные напряжения считают равномерно распределенными по площади опасного сечения. С учетом принятых условностей допускаемая нагрузка лобового шва определяется по формуле

$$F'_{adm} = b \cdot 0,7 k \tau'_{adm}, \quad (III.13)$$

где τ'_{adm} — допускаемое напряжение на срез для электросварного шва.

Допускаемое усилие для одного флангового шва

$$F''_{adm} = l \cdot 0,7 k \tau'_{adm}. \quad (III.14)$$

Очевидно, для прочности соединения необходимо, чтобы допускаемое суммарное сопротивление швов было не меньше силы, действующей на соединение:

$$2F'_{adm} + 2F''_{adm} \geq F. \quad (III.15)$$

Пользуясь этим уравнением, можно, задавшись размером k , определить необходимую длину швов.

Пример III.1. Рассчитать заклепочное соединение двух листов одинакового сечения толщиной $t=16$ мм, перекрытых двумя накладками (см. рис. III.5), если $F=0,5$ МН. Допускаемые напряжения: $\sigma_{adm} = 160$ МПа, $\tau_{adm} = 90$ МПа, $\sigma'_{con} = 320$ МПа.

Решение. В данном случае заклепки двухсрезные, так как для разрушения соединения необходимо, чтобы каждая заклепка срезалась по двум плоскостям, причем диаметр заклепки $d=20$ мм $= 2 \cdot 10^{-2}$ м. Определяем необходимое число срезов по формуле (III.10):

$$n = \frac{F}{(\pi d^2/4) \tau_{adm}} = \frac{0,5 \cdot 4}{3,14 \cdot 2^2 \cdot 10^{-4} \cdot 90} = 17,6 \text{ срезов.}$$

Следовательно, необходимо принять девять заклепок. Необходимое число заклепок по смятию определяем по формуле (III.12):

$$n' = \frac{F}{td\sigma'_{con}} = \frac{0,5}{0,016 \cdot 0,02 \cdot 320} = 5,85 \approx 6 \text{ заклепок.}$$

Решающим явился расчет на срез. Принимаем девять заклепок — с каждой стороны стыка в три ряда по три заклепки в ряд (см. рис. III.5). Подберем сечение листа из расчета на растяжение:

$$A = \frac{F}{\sigma_{adm}} = 0,5/160 = 31,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 31,3 \text{ см}^2.$$

Отсюда при толщине $t=1,6$ см найдем ширину листа: $b_0 = \frac{A}{t} = 31,3/1,6 = 19,5$ см.

К этой рабочей ширине надо добавить ширину отверстий $3d=6$ см, тогда получим полную ширину листа $b=19,5+6=25,5$ см. Этой ширины вполне достаточно для размещения трех заклепок. (Расстояние между

центрами заклепок принимаем равным $3d$.) Толщина t_1 каждой накладки должна быть не менее половины толщины листа; принимаем $t_1 = 0,8$ см.

Пример III.2. Произвести расчет сварного соединения по данным предыдущего примера (рис. III.8). Допускаемое напряжение на срез для швов $\tau_{adm} = 110$ МПа.

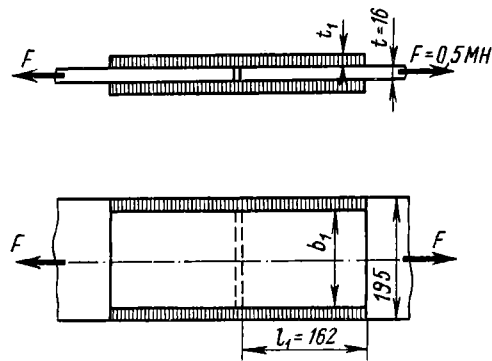


Рис. III.8

Решение. Чтобы оставить место для размещения фланговых швов, примем ширину накладки b_1 несколько меньше ширины листа b_0 , т. е. $b_1 = b_0 - 2t = 19,5 - 3,2 = 16,3$ см. По условию равнопрочности площадь сечения двух накладок должна быть не меньше площади сечения листа, т. е. $2b_1 t_1 \geq A$. Отсюда толщина накладки

$$t_1 \geq 1,6 \cdot 19,5 / (2 \cdot 16,3) = 0,96 \text{ см.}$$

Примем $t_1 = 1$ см. Необходимую рабочую длину фланговых швов l_1 определим из условия [см. формулу (III.14)]

$$110 \cdot 4 \cdot 0,7 \cdot k \cdot l_1 = 0,5.$$

Отсюда (при $k = t_1 = 0,01$ м)

$$l_1 = 0,162 \text{ м} = 16,2 \text{ см.}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ

§ 27. СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СЕЧЕНИЯ

При дальнейшем изучении вопросов прочности, жесткости и устойчивости нам придется иметь дело с некоторыми геометрическими характеристиками сечения: статическими моментами, моментами инерции, моментами сопротивления.

Статическим моментом S_x сечения (фигуры) относительно какой-либо оси x (рис. IV.1) называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$S_x = \int_A y dA, \quad (IV.1)$$

где y — расстояние от элементарной площадки dA до оси Ox .

Единицей статического момента является единица длины в третьей степени, обычно см^3 .

Статический момент может быть положительным, отрицательным и, в частности, равным нулю. Если отождествить площадь с силой, действующей перпендикулярно плоскости чертежа, то интеграл [IV.1] можно рассматривать как сумму моментов сил относительно оси Ox . По известной из теоретической механики теореме о моменте равнодействующей можно написать

$$S_x = \int_A y dA = Ay_C, \quad (IV.2)$$

где A — площадь всей фигуры (равнодействующая); y_C — расстояние от центра тяжести фигуры до Ox .

Из формулы (IV.2) следует формула определения ординаты центра тяжести

$$y_C = S_x/A. \quad (IV.3)$$

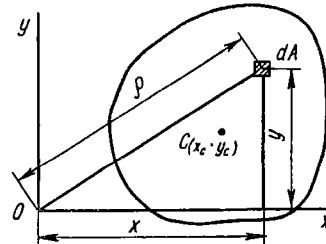


Рис. IV.1

Аналогично, статический момент относительно оси Oy

$$S_y = \int_A x dA = Ax_c, \quad (IV.4)$$

откуда

$$x_c = S_y/A. \quad (IV.5)$$

Центр тяжести обладает тем свойством, что если тело опереть в этой точке, то оно будет находиться в равновесии.

Из формул (IV.2) и (IV.4) следует, что если оси x и y проходят через центр тяжести фигуры, то статический момент относительно этих осей равен нулю. Такие оси называются **центральными осями**.

Если фигуру можно представить в виде отдельных простых фигур (квадратов, треугольников и т. д.), для которых известны положения центров тяжести, то в этом случае статический момент всей фигуры можно получить как сумму статических моментов этих простых фигур. Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла.

Если фигура имеет ось симметрии, то последняя всегда проходит через центр тяжести фигуры, а потому статический момент фигуры относительно оси симметрии всегда равен нулю.

Во многих случаях вместо простых интегралов вида (IV.1) и (IV.4) удобнее иметь дело с двойными интегралами вида

$$S_x = \int_A y dA = \iint_D y dx dy; \quad (IV.1a)$$

$$S_y = \int_A x dA = \iint_D x dx dy. \quad (IV.4a)$$

Здесь D — область интегрирования.

Пример IV.1. Определить положение центра тяжести сечения, показанного на рис. IV.2, а.

Решение. Разбиваем сечение на два прямоугольника. Проводим вспомогательные оси x и y .

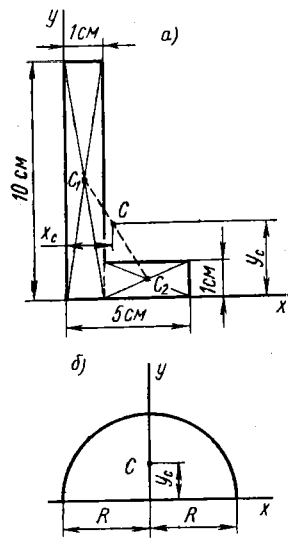


Рис. IV.2

По формулам (IV.3) и (IV.5) получим

$$\begin{aligned}x_C &= S_y/A = (A_1x_1 + A_2x_2)/(A_1 + A_2) = \\&= (10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1 \cdot 3)/(10 + 4) = 1,22 \text{ см}; \\y_C &= S_x/A = (A_1y_1 + A_2y_2)/(A_1 + A_2) = \\&= (10 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5)/(10 + 4) = 3,72 \text{ см}.\end{aligned}$$

По этим координатам находим точку C — центр тяжести сечения. Она лежит на линии, соединяющей точки C_1 и C_2 ближе к фигуре, имеющей большую площадь.

Пример IV.2. Вычислить ординату центра тяжести половины круга (рис. IV.2, б).

Решение. Пользуемся формулой

$$y_C = S_x/A = \iint y dx dy / A.$$

Вычисляем числитель, используя уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$:

$$S_x = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \int_{-R}^R dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3} R^3.$$

Вычисляем y_C , имея в виду, что $A = \pi R^2/2$:

$$y_C = S_x/A = 4R/(3\pi) \cong 0,424R.$$

§ 28. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Осевым или экваториальным моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, численно равная интегралу: относительно оси x

$$I_x = \int_A y^2 dA = \iint_D y^2 dx dy;$$

относительно оси y

$$I_y = \int_A x^2 dA = \iint_D x^2 dx dy, \quad (IV.6)$$

где y — расстояние от элементарной площадки dA до оси x (см. рис. IV.1); x — расстояние от элементарной площадки до оси y ; D — область интегрирования.

Полярным моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$I_p = I_0 = \int_A \rho^2 dA = \iint_D \rho^2 dx dy, \quad (IV.7)$$

где ρ — расстояние от площадки dA до точки (полюса) (см. рис. IV.1), относительно которой вычисляется полярный момент инерции.

Осевой и полярный моменты инерции всегда положительны. Действительно, независимо от знака координаты произвольной площадки соответствующее слагаемое положительно, так как в него входит квадрат этой координаты.

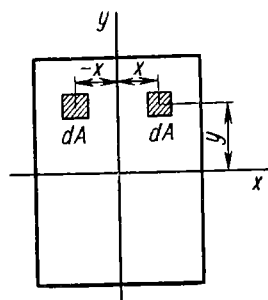


Рис. IV.3

Центробежным моментом инерции D_{xy} сечения называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$D_{xy} = I_{xy} = \int_A xy \, dA = \iint_D xy \, dx \, dy, \quad (IV.8)$$

где x, y — расстояния от площадки dA до осей x и y .

Единицей момента инерции является единица длины в четвертой степени (по СИ — m^4 , хотя для прокатных профилей по ГОСТу — $см^4$).

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю.

➤ Если взаимно перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю. Действительно, для симметричной фигуры всегда можно выделить два элемента ее площади (рис. IV.3), которые имеют одинаковые ординаты y и равные, но противоположные по знаку абсциссы x . Составляя сумму произведений $xy \, dA$ для таких элементов, т. е. вычисляя интеграл (IV.8), получают в результате нуль.

Легко доказать, что

полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Действительно, из рис. IV.1 видно, что $\rho^2 = x^2 + y^2$. Подставив это значение ρ^2 в выражение (IV.7), получим

$$I_p = \int_A \rho^2 \, dA = \int_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA.$$

Следовательно,

$$I_p = I_x + I_y.$$

(IV.9)

§ 29. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Определим момент инерции фигуры относительно какой-либо оси x_1 (рис. IV.4).

Пусть x_0 — центральная ось и момент инерции I_{x_0} известен. Из чертежа видно $y_1 = a + y$. Следовательно,

$$I_{x_1} = \int_A (a + y)^2 dA = a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA + \int_A y^2 dA.$$

Первый интеграл дает площадь сечения. Второй интеграл, представляющий статический момент относительно центральной оси x_0 , равен нулю.

Третий интеграл представляет собой момент инерции I_{x_0} фигуры относительно оси x_0 . Таким образом,

$$I_{x_1} = I_{x_0} + Aa^2. \quad (\text{IV.10})$$

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Из формулы [IV.10] видно, что момент инерции относительно центральной оси меньше, чем момент инерции относительно любой нецентральной оси, параллельной центральной.

Момент инерции относительно центральной оси называется центральным моментом инерции.

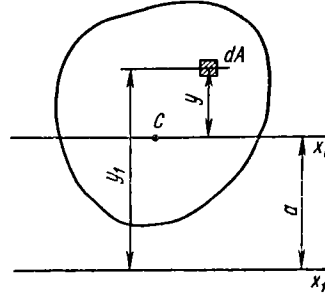


Рис. IV.4

§ 30. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЫХ СЕЧЕНИЙ

1. **Прямоугольник** (рис. IV.5, а). Вычислим момент инерции сечения относительно оси x_0 , проходящей через центр тяжести параллельно основанию. За dA примем площадь бесконечно тонкого слоя $dA = bdy$. Тогда

$$I_{x_0} = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = bh^3/12.$$

Итак,

$$I_{x_0} = bh^3/12. \quad (IV.11)$$

Аналогично, получим

$$I_{y_0} = hb^3/12. \quad (IV.12)$$

2. **Круг** (рис. IV.5, б). Сначала определим полярный момент инерции относительно центра круга:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$

За dA принимаем площадь бесконечно тонкого кольца толщиной $d\rho$, т. е. $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда

$$I_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \pi r^4/2.$$

Следовательно,

$$I_p = \pi r^4/2 = \pi d^4/32 \approx 0,1d^4. \quad (IV.13)$$

Теперь легко найдем I_{x_0} . Действительно, для круга согласно формуле (IV.9) имеем $I_p = 2I_{x_0} = 2I_{y_0}$, откуда

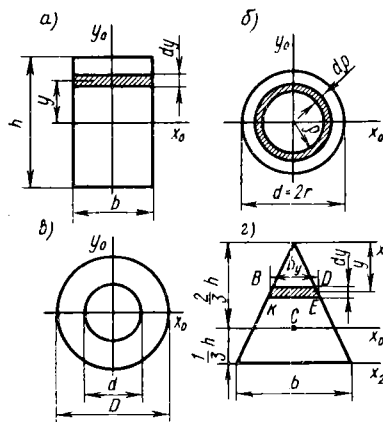


Рис. IV.5

$$I_{x_0} = I_{y_0} = I_p/2 = \pi r^4/4 = \pi d^4/64 \approx 0,05d^4. \quad (IV.14)$$

3. **Кольцо** (рис. IV.5, в). Осевой момент инерции в этом случае равен разности моментов инерции внешнего и внутреннего кругов:

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \pi D^4/64 - \pi d^4/64 = 0,05D^4 (1 - c^4), \quad (IV.15)$$

где $c = d/D$.

Аналогично, полярный момент инерции

$$I_p = \pi D^4/32 - \pi d^4/32 = 0,1D^4 (1 - c^4). \quad (IV.16)$$

4. **Треугольник** (рис. IV.5, г). Определим момент инерции относительно оси x_1 , параллельной основанию и проходящей через вершину треугольника:

$$I_{x_1} = \int_A y^2 dA.$$

За dA примем площадь бесконечно тонкой трапеции $KBDE$. Ее площадь можно считать равной площади прямоугольника $dA = b_y dy$, где b_y — длина прямоугольника.

Легко получить из подобия треугольников $b_y = yb/h$; тогда

$$I_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4}. \quad (\text{IV.17})$$

Определим момент инерции относительно центральной оси; для этого используем формулу (IV.10):

$$I_{x_0} = I_{x_1} - Aa^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \quad (\text{IV.18})$$

Определим момент инерции относительно оси, проходящей через основание:

$$I_{x_2} = I_{x_0} + Aa^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{12}. \quad (\text{IV.19})$$

§ 31. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ ФИГУР

Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее составных частей:

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} + \dots \quad (\text{IV.20})$$

Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла

$$\int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots,$$

где $A = A_1 + A_2 + \dots$.

Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур и затем просуммировать эти моменты инерции.

Указанная теорема справедлива также и для центробежного момента инерции.

Моменты инерции прокатных сечений (двутавров, швеллеров, уголков и т. д.) приводятся в таблицах сортамента.

§ 32. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей x , y и моментами инерции относительно осей x_1 , y_1 , повернутых на угол α (рис. IV.6). Пусть $I_x > I_y$ и положительный угол α отсчитывается от оси x против часовой стрелки.

Для решения поставленной задачи найдем зависимость между координатами площадки dA в исходных и повернутых осях. Из чертежа следует:

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{OC} = \overline{OE} + \overline{EC} = \overline{OE} + \overline{DF} = \overline{OD} \cos \alpha + \overline{DB} \sin \alpha = \\ &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \end{aligned} \quad (IV.21)$$

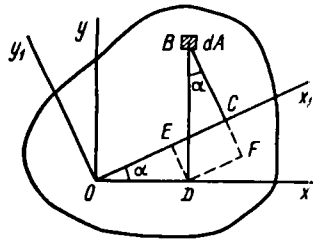


Рис. IV.6

$$\begin{aligned} y_1 &= \overline{BC} = \overline{BF} - \overline{DE} = \\ &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (IV.22)$$

Теперь определим моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 :

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_{\lambda} y_1^2 dA = \\ &= \int_{\lambda} (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \end{aligned}$$

$$= \int_{\lambda} y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_{\lambda} xy \sin \alpha \cos \alpha dA + \int_{\lambda} x^2 \sin^2 \alpha dA,$$

или

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2D_{xy} \sin \alpha \cos \alpha; \quad (IV.23)$$

аналогично,

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_{\lambda} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\ &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + 2D_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (IV.24)$$

$$\begin{aligned} D_{x_1, y_1} &= \int_{\lambda} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\ &= I_x \sin 2\alpha / 2 - I_y \sin 2\alpha / 2 + D_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (IV.25)$$

Складывая (IV.23) и (IV.24), получаем

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p. \quad (IV.26)$$

Вычитая (IV.23) из (IV.24), получаем

$$I_{x_1} - I_{y_1} = (I_x - I_y) \cos 2\alpha - 2D_{xy} \sin 2\alpha. \quad (IV.27)$$

Формула (IV.26) показывает, что

сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей не меняется при их повороте.

Формула (IV.27) может быть использована для вычисления центробежного момента инерции относительно осей x, y по известным осевым моментам инерции относительно осей x, y и x_1, y_1 .

§ 33. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

При изменении угла α I_{x_1}, I_{y_1} и D_{x_1, y_1} изменяются. Найдем значение угла, при котором I_{x_1} и I_{y_1} имеют экстремальные значения. Для этого возьмем от I_{x_1} или I_{y_1} первую производную по α и приравняем ее нулю:

$$dI_{x_1}/d\alpha = -2I_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + \\ + 2I_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2D_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

или

$$(I_y - I_x) \sin 2\alpha_0 - 2D_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2D_{xy}/(I_y - I_x)}. \quad (\text{IV.28})$$

Эта формула определяет положение двух осей, относительно одной из которых осевой момент инерции максимален, а относительно другой — минимален.

Такие оси называют **главными**. Моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**.

Значения главных моментов инерции найдем из формул (IV.23) и (IV.24), подставив в них α_0 из формулы (IV.28), при этом используем известные формулы тригонометрии для функций двойных углов (см. § 16).

После преобразований получим следующую формулу для определения главных моментов инерции:

$$\boxed{I_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}}. \quad (\text{IV.29})$$

По своей структуре эта формула аналогична формуле (II.36) для главных напряжений.

Исследуя вторую производную $d^2I_{x_1}/d\alpha^2$, можно установить, что для данного случая ($I_x > I_y$) максимальный момент инерции I_{\max} имеет место относительно главной оси, повернутой на угол

α_0 по отношению к оси x , а минимальный момент инерции — относительно другой, перпендикулярной оси. В большинстве случаев в этом исследовании нет надобности, так как по конфигурации сечений видно, какая из главных осей соответствует максимуму момента инерции.

Кроме формулы (IV.29) для определения главных моментов инерции можно пользоваться также формулами (IV.23) и (IV.24). При этом сам собой решается вопрос: относительно какой главной оси получается максимальный момент инерции и относительно какой оси — минимальный?

Покажем теперь, что относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю.

Действительно, приравнявая $D_{x_1 y_1}$ по формуле (IV.25) нулю, получаем

$$[(I_x - I_y) / 2] \sin 2\alpha_0 + D_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда для $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ вновь получается формула (IV.28).

Таким образом, главными осями называют оси, обладающие следующими свойствами:

1. Центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю.
2. Моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значения (относительно одной — максимум, относительно другой — минимум).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

Во многих случаях удается сразу определить положение главных центральных осей. Если фигура имеет ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей, вторая проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно первой. Сказанное следует из того обстоятельства, что относительно оси симметрии и любой оси, ей перпендикулярной, центробежный момент инерции равен нулю.

Используя формулы (IV.23) — (IV.25), можно показать, что если два главных центральных момента инерции сечения равны между собой, то у этого сечения любая центральная ось является главной и все главные центральные моменты инерции одинаковы (круг, квадрат, шестиугольник, равносторонний треугольник).

Действительно, предположим, что для какого-то сечения оси x и y — главные центральные оси и, кроме того, $I_x = I_y$. Тогда из формул (IV.23) и (IV.24) получим, что $I_x = I_y = I_{x_1} = I_{y_1}$, а из формулы (IV.25) убедимся, что $D_{x_1 y_1} = 0$, т. е. любые оси x_1 и y_1 являются главными центральными осями инерции такой фигуры.

**§ 34. ЗАВИСИМОСТЬ
МЕЖДУ ЦЕНТРОБЕЖНЫМИ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ
ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ СИСТЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ**

Пусть оси x_0y_0 — центральные оси (рис. IV.7) и момент инерции $D_{x_0y_0}$ известен. Найдем центробежный момент инерции относительно осей x_1 и y_1 . Из рисунка видно, что

$$x_1 = x_0 + b, \quad y_1 = y_0 + a.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{x_1y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x_0 + b)(y_0 + a) dA = \\ &= \int_A x_0 y_0 dA + b \int_A y_0 dA + a \int_A x_0 dA + \int_A ab dA, \quad (IV.30) \end{aligned}$$

или

$$\boxed{D_{x_1y_1} = D_{x_0y_0} + Aab.} \quad (IV.30a)$$

Второй и третий интегралы в правой части равенства (IV.30), представляющие статические моменты относительно центральных осей, равны нулю.

Итак,

центробежный момент инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести относительно новых осей.

Если оси x_0 и y_0 являются центральными главными осями, то относительно этих осей $D_{x_0y_0} = 0$ и формула (IV.30a) упрощается:

$$D_{x_1y_1} = Aab. \quad (IV.31)$$

Для сложной фигуры, состоящей из n простых фигур,

$$D_{x_1y_1} = \sum_1^n A_i a_i b_i \quad (IV.32)$$

(при условии, что собственные центральные оси каждой фигуры являются главными осями).

Пример IV.3. Вычислить центробежный момент инерции уголка $100 \times 100 \times 10$ относительно центральных осей x_1 и y_1 (рис. IV.8).

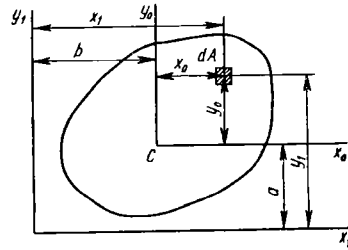


Рис. IV.7

Решение. Воспользуемся формулой (IV.25) и определим центрострейный момент инерции по известным из таблиц сортамента моментам инерции относительно главных центральных осей x_0 и y_0 :

$$I_{x_0} = 284 \text{ см}^4 = 284 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad I_{y_0} = 74,1 \text{ см}^4 = 74,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$D_{x_1 y_1} = \frac{(I_{x_0} - I_{y_0}) \sin 2\alpha}{2} + D_{x_0 y_0} \cos 2\alpha.$$

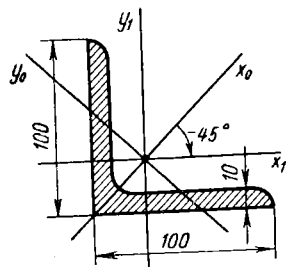


Рис. IV.8

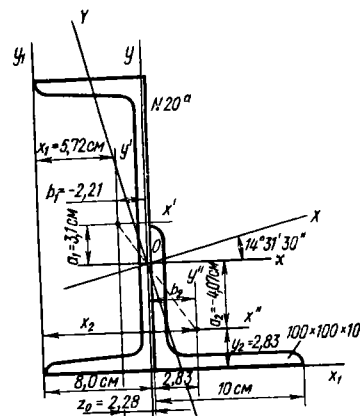


Рис. IV.9

Так как оси x_0 и y_0 являются главными центральными осями (ось x_0 — ось симметрии фигуры), то момент инерции $D_{x_0 y_0}$ равен нулю. Угол $\alpha = -45^\circ$, так как оси x_1 и y_1 , относительно которых вычисляется центрострейный момент инерции, повернуты по часовой стрелке относительно осей x_0 и y_0 . Следовательно,

$$D_{x_1 y_1} = \frac{284 - 74,1}{2} (-1) = -104,95 \text{ см}^4 = -104,95 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Пример IV.4. Вычислить главные центральные моменты инерции сечения (рис. IV.9).

Решение.

1. Определяем координаты центра тяжести, для чего проводим вспомогательные оси x_1 и y_1 , и разбиваем сечение на две фигуры: швеллер I и уголок II, для которых все необходимые данные имеются в таблицах сортамента (табл. IV.1).

Координаты центра тяжести сечения определяем по формулам

$$x_0 = (A_1 x_1 + A_2 x_2) / (A_1 + A_2);$$

$$y_0 = (A_1 y_1 + A_2 y_2) / (A_1 + A_2).$$

Таблица IV.1

Фигура	Площадь сечения A , см ²	Положение центра тяжести z_0 , см	Моменты инерции относительно собственных центральных осей, см ⁴	
			горизонтальной	вертикальной
Швеллер № 20а Уголок 100×100×10	25,2	2,28	1670	139
	19,2	2,83	179	179

где A_1 — площадь первой фигуры (швеллера); x_1 — расстояние от оси y_1 до центра тяжести швеллера (здесь $x_1 = 8,0 - 2,28 = 5,72$ см, где 8,0 см — ширина полки швеллера, а $z_0 = 2,28$ см — расстояние от центра тяжести швеллера до стенки); A_2 — площадь сечения уголка; x_2 — расстояние от центра тяжести уголка до оси y_1 . Оно равно $x_2 = 8,0 + 2,83 = 10,83$ см.

Расстояние от оси x_1 до центра тяжести швеллера равно $y_1 = 10$ см, так как высота швеллера 20 см; расстояние от оси x_1 до центра тяжести уголка равно $y_2 = 2,83$ см. Подставляя числовые значения, получим

$$x_0 = \frac{25,2 \cdot 5,72 + 19,2 \cdot 10,83}{25,2 + 19,2} = 7,93 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{25,2 \cdot 10 + 19,2 \cdot 2,83}{25,2 + 19,2} = 6,9 \text{ см}.$$

По этим данным наносим точку O — центр тяжести сечения — и проводим вспомогательные центральные оси x и y . Тогда O должна лежать на линии, соединяющей центры тяжести швеллера и уголка.

2. Вычисляем моменты инерции относительно осей x и y :

$$I_x = I_x^I + I_x^{II}; \quad I_y = I_y^I + I_y^{II}.$$

Для вычисления момента инерции швеллера I_x^I относительно оси x используем формулу (IV.10):

$$I_x^I = 1670 + 25,2 (+3,10)^2 = 1912 \text{ см}^4 = 1912 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

где $I_{x'} = 1670 \text{ см}^4 = 1670 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ — момент инерции швеллера относительно собственной центральной оси x' ; $A = 25,2 \text{ см}^2$ — площадь сечения швеллера; $a_1 = 10 - 6,90 = 3,10$ см — расстояние от оси x до центра тяжести швеллера (берется с плюсом, так как центр тяжести швеллера выше оси x).

Аналогично, момент инерции уголка относительно оси x :

$$I_x^{II} = 179 + 19,2 (-4,07)^2 = 497 \text{ см}^4 = 497 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

где $I_{x''} = 179 \text{ см}^4 = 179 \cdot 10^{-8}$ — момент инерции уголка относительно со-

бственной центральной оси x'' ; $A = 19,2 \text{ см}^2$ — площадь сечения уголка; $a_2 = 2,83 - 6,90 = -4,07 \text{ см}$ — расстояние от оси x до центра тяжести уголка. Знак минус берется потому, что центр тяжести уголка лежит ниже оси x . Суммарный момент инерции сечения относительно оси x равен

$$I_x = 1912 + 497 = 2409 \text{ см}^4 = 2409 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Точно так же вычисляем момент инерции сечения относительно оси y .
Для швеллера

$$I_y^I = 139 + 25,2 (-2,21)^2 = 262,5 \text{ см}^4 = 262,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

где $b_1 = 5,72 - 7,93 = -2,21 \text{ см}$ — расстояние от оси y до центра швеллера. Знак минус берется потому, что центр тяжести швеллера расположен левее оси y .

Для уголка

$$I_y^{II} = 179 + 19,2 (2,9)^2 = 340,5 \text{ см}^4 = 340,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

где $b_2 = 8 + 2,83 - 7,93 = 2,90 \text{ см}$ — расстояние от оси y до центра тяжести уголка.

Суммарный момент инерции сечения относительно оси y равен

$$I_y = 262,5 + 340,5 = 603 \text{ см}^4 = 603 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Вычисляем центробежный момент инерции сечения относительно осей x и y . Для этого воспользуемся формулой (IV.30a). Так как швеллер имеет горизонтальную ось симметрии x' , то собственные центральные оси швеллера x' и y' являются главными осями и поэтому первое слагаемое в формуле (IV.30a) для швеллера равно нулю.

Для уголка собственные центральные оси, параллельные осям x и y , т. е. оси x'' и y'' не являются главными осями, поэтому первое слагаемое в формуле (IV.30a) для уголка не равно нулю. Его следует вычислить так же, как это было сделано в примере IV.3. Там было получено $D_{x''y''} = -104,95 \text{ см}^4$. Следовательно, центробежный момент инерции всего сечения равен

$$D_{xy} = 25,2 (+3,10) \cdot (-2,21) - 104,95 + 19,2 (-4,07) \cdot (2,90) =$$

$$= -172,0 - 104,95 - 225 = -501,9 \text{ см}^4 = -501,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

3. Определяем положение главных осей по формуле (IV.28):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2D_{xy} / (I_y - I_x) = 2(-501,95) / (603 - 2409) = 0,555;$$

$$2\alpha_0 = 29^\circ 03'; \alpha_0 = 14^\circ 31' 30''.$$

Отложим этот угол (против часовой стрелки) и проведем главные центральные оси X и Y . Если бы $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ и α_0 получились со знаком минус, то главные центральные оси были бы повернуты относительно осей x и y по ходу часовой стрелки.

4. Вычисляем главные центральные моменты инерции по формуле (IV.29):

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{(2409 + 603)}{2} \pm 0,5 \sqrt{(2409 - 603)^2 + 4 \cdot 501,95^2} = 1506 \pm 1030.$$

Следовательно,

$$I_{\max} = 2536 \text{ см}^4 = 2536 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{\min} = 476 \text{ см}^4 = 476 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Так как $I_x > I_y$, то I_{\max} будет относительно главной оси X , а I_{\min} — относительно оси Y .

Для проверки используем формулы (IV.23) и (IV.24):

$$I_x = 2409 \cdot 0,937 + 603 \cdot 0,0625 + 501,95 \cdot 0,485 = 2536 \text{ см}^4 = \\ = 2536 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_y = 2409 \cdot 0,0625 + 603 \cdot 0,937 - 501,95 \cdot 0,485 = 476 \text{ см}^4 = \\ = 476 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

где $\cos^2 \alpha = \cos^2 (14^\circ 31' 30'') = 0,968^2 = 0,937$; $\sin^2 \alpha = \sin^2 (14^\circ 31' 30'') = 0,25^2 = 0,0625$.

Пример IV.5. Вычислить центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно осей x и y и x_0 и y_0 (рис. IV.10).

Решение. Центробежный момент вычисляем с помощью двойного интеграла:

$$D_{xy} = \iint xy dx dy.$$

Уравнение прямой OB $y = hx/b$, поэтому

$$D_{xy} = I_{xy} = \int_0^b x dx \int_0^{hx/b} y dy = b^2 h^2 / 8.$$

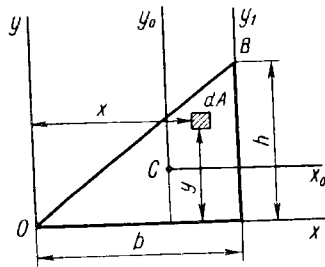


Рис. IV.10

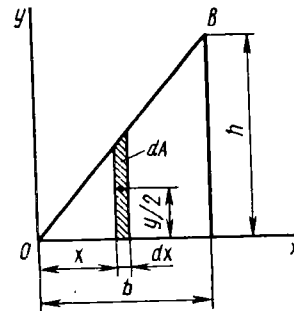


Рис. IV.11

Центробежный момент относительно центральных осей x_0 и y_0 вычисляем по формуле

$$D_{x_0y_0} = D_{xy} - Aab = \frac{b^2h^2}{8} - \frac{bh}{2} \left(-\frac{2}{3}b \right) \left(-\frac{h}{3} \right) = \frac{b^2h^2}{72}.$$

То же относительно осей x_1 и y_1 , совпадающих с его катетами:

$$D_{x_1y_1} = D_{x_0y_0} + Aab = \frac{b^2h^2}{72} + \frac{bh}{2} \left(-\frac{b}{3} \right) \frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{24}.$$

Решение этого примера в простых интегралах имело бы вид

$$D_{xy} = \int_{\lambda} xy dA,$$

где x и y — координаты элементарной площади dA .

За элементарную площадь принимаем площадь заштрихованного столбца (рис. IV.11)

$$dA = y dx.$$

Расстояние от центра тяжести этого столбца до оси x равно $y/2$. Тогда получили бы интеграл (при $y = hx/b$)

$$D_{xy} = \int_0^b x \frac{y}{2} y dx = \frac{1}{2} \int_0^b y^2 x dx = \frac{1}{2} \frac{h^2}{b^2} \int_0^b x^3 dx = \frac{b^2h^2}{8}.$$

§ 35. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Стержень испытывает **кручение**, если в его поперечных сечениях возникают крутящие моменты, т. е. моменты, лежащие в плоскости сечения. Обычно эти крутящие моменты T возникают под действием внешних моментов ** T_e (рис. V.1). Внешние моменты передаются на вал, как правило, в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес и т. п.

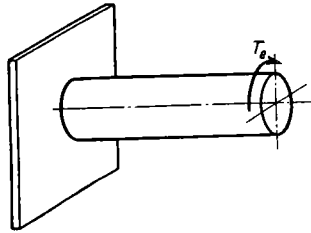


Рис. V.1

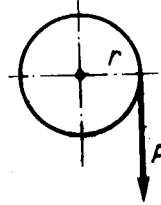


Рис. V.2

Однако и поперечная нагрузка, смещенная относительно оси стержня, вызывает крутящие моменты (рис. V.2), но в указанном случае в поперечных сечениях наряду с крутящими моментами возникают и другие внутренние усилия — поперечные силы и изгибающие моменты.

Вращающиеся и работающие на кручение стержни называют валами.

Вместо аксонометрического изображения будем применять главным образом плоское, как более простое. Внешние скручи-

* В настоящей главе рассматривается расчет на кручение при действии статической нагрузки. Расчет валов при действии переменных во времени моментов (расчет на выносливость) рассматривается в гл. XII.

** Индекс у внешнего крутящего момента от *external* (англ.) — внешний.

вающие моменты и внутренние крутящие моменты будем изображать в виде линии с двумя кружочками. В одном из них будем ставить точку, обозначающую начало стрелки (на нас), а в другом — крестик, обозначающий конец стрелки, направленный от нас (рис. V.3).

Для определения крутящих моментов T , возникающих в сечениях вала под действием внешних скручивающих моментов или поперечной нагрузки, будем применять метод сечений. Сделаем мысленный разрез стержня (рис. V.3), например по $a - a$, отбросим одну часть стержня, в данном случае левую, и рассмотрим равновесие оставшейся правой части.

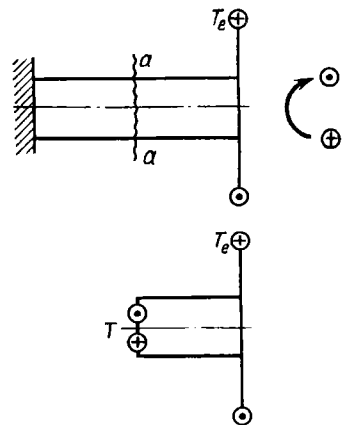


Рис. V.3

Взаимодействие частей стержня заменим крутящим моментом T , уравнивающим внешний момент T_e . Для равновесия отсеченной части необходимо, чтобы алгебраическая сумма всех моментов, действующих на нее, была равна нулю. Отсюда в рассматриваемом случае $T = T_e$. Если на отсеченную часть будет действовать несколько внешних моментов, то, проведя

аналогичные рассуждения, можно убедиться, что

крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения.

Для наглядного представления о характере распределения и значении крутящих моментов по длине стержня строят эпюры (графики) этих моментов. Построение их вполне аналогично построению эпюр продольных сил при растяжении или сжатии. Для построения эпюр необходимо условиться о правиле знаков. Общепринятого правила знаков для крутящих моментов не существует. Может быть принято любое правило знаков. Важно лишь принятое правило выдержать на всем протяжении эпюры.

Примем следующее правило знаков (рис. V.4). Крутящий момент в сечении $a - a$ считается **положительным**, когда внешний момент вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения. Если же внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке (при взгляде со стороны сечения), то крутящий момент в сечении будем считать **отрицательным**.

Построение эпюры крутящих моментов поясним на следую-

шем примере (рис. V.5). Рассмотрим вал CD , опирающийся на подшипники B и A и находящийся в равновесии под действием приложенных к нему в сечениях E , K и L моментов. Сделав сечение $a - a$ где-либо на участке DL и рассмотрев равновесие правой отсеченной части, убедимся, что $T=0$. Если мы сделаем затем сечение $b - b$ в любом месте участка LK , то из условия равновесия правой от сечения части получим $T=20 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

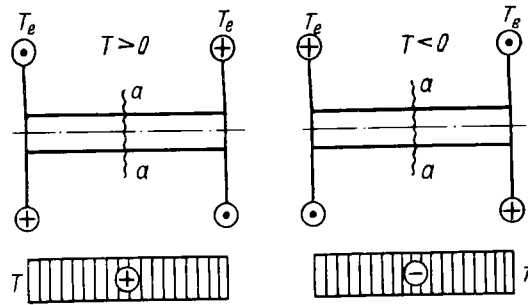


Рис. V.4

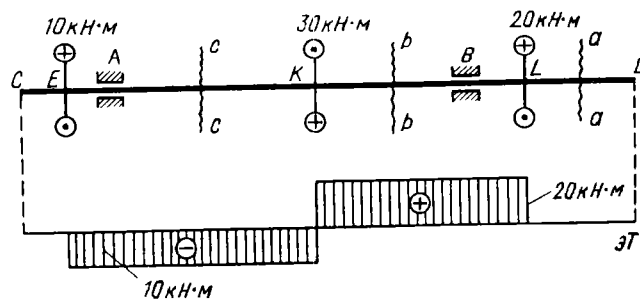


Рис. V.5

Момент считаем положительным в соответствии с принятым правилом знаков. Сделав сечение $c - c$ на участке KE , из условия равновесия правой части получим $20 - 30 - T = 0$, откуда $T = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Получившаяся эпюра имеет форму двух прямоугольников. Важно заметить, что в местах приложения внешних моментов ординаты эпюры скачкообразно изменяются на величину приложенного здесь внешнего момента.

Если заданы поперечные нагрузки, вызывающие кручение стержня (см. рис. V.2), то предварительно вычисляют внешние

скручивающие моменты, создаваемые этими силами. В случае, представленном на рис. V.2, внешний скручивающий момент от силы F равен $T_e = Fr$. После определения внешних моментов определяют внутренние крутящие моменты и строят эпюры, как указано выше.

§ 36. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Крутящие моменты, о которых шла речь выше, представляют лишь равнодействующие внутренних сил. Фактически в поперечном сечении скручиваемого стержня действуют непрерывно

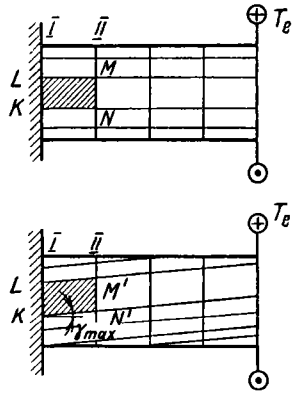


Рис. V.6

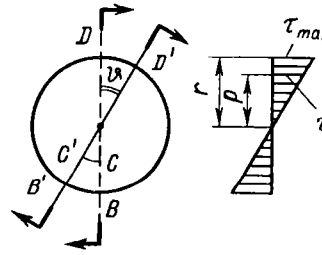


Рис. V.7

распределенные внутренние касательные напряжения, к определению которых теперь и перейдем.

Ознакомимся прежде всего с результатами опытов. Если на поверхности стержня круглого сечения нанести прямоугольную сетку, то после деформации окажется (рис. V.6):

1) прямоугольная сетка превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях бруса, а по закону парности касательных напряжений — и в продольных его сечениях;

2) расстояния между окружностями, например между I и II, не изменятся. Не изменится длина стержня и его диаметр. Естественно допустить, что каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое (**гипотеза плоских и жестких сечений**). На основании этой гипотезы можно считать, что радиусы всех поперечных сечений

будут поворачиваться (на разные углы), оставаясь прямолинейными.

На основании этого можно принять, что при кручении в поперечных сечениях стержня действуют только касательные напряжения, т. е. напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой чистый сдвиг.

Формулы, полученные на основе этого допущения, подтверждаются опытами. Точка D переместится по дуге DD' , точка C — по меньшей дуге CC' (рис. V.7).

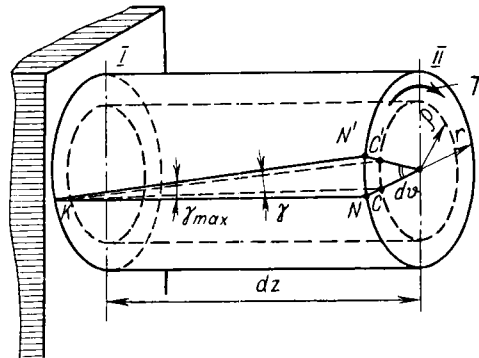


Рис. V.8

Для установления закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня рассмотрим более детально деформации стержня (рис. V.6 и V.8). На рис. V.8 в более крупном масштабе изображена часть стержня между сечениями I и II и показана одна сторона KN элемента $KLMN$ (см. рис. V.6).

Угол сдвига для элемента $KLMN$, лежащего на поверхности стержня, равен отношению отрезка NN' к длине элемента dz (рис. V.8):

$$\gamma_{\max} = r d\theta / dz. \quad (V.1)$$

Выделяя мысленно из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного радиуса ρ и повторяя те же рассуждения, получим угол сдвига для элемента, отстоящего на расстоянии ρ от оси стержня:

$$\gamma = \rho d\theta / dz. \quad (V.2)$$

На основании закона Гука при сдвиге имеем

$$\tau = G\gamma = G\rho d\theta / dz. \quad (V.3)$$

Как видим, при кручении деформации сдвига и касательные напряжения прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения. Эпюра касательных напряжений по поперечному сечению стержня представлена на рис. V.7 справа.

В центре тяжести круглого сечения касательные напряжения равны нулю. Наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности стержня.

Зная закон распределения касательных напряжений, легко определить их из условия, что крутящий момент в сечении представляет собой равнодействующий момент касательных напряжений в сечении:

$$T = \int_A \tau \rho dA, \quad (V.4)$$

где $\tau \rho dA$ — элементарный крутящий момент внутренних сил, действующих на площадке dA .

Подставив в (V.4) значение напряжений из формулы (V.3), получим

$$T = G \frac{d\phi}{dz} \int_A \rho^2 dA. \quad (V.5)$$

Имея в виду, что

$$\int_A \rho^2 dA = I_p, \quad (V.6)$$

где I_p — полярный момент инерции сечения, получим

$$d\phi/dz = T/(GI_p). \quad (V.7)$$

Подставляя значение $d\phi/dz$ в формулу (V.3), имеем

$$\tau = T\rho/I_p. \quad (V.8)$$

В частном случае, когда на стержень действует один внешний скручивающий момент T_e (рис. V.9), из условия равновесия отсеченной части стержня получим $T = T_e$.

Таким образом, окончательная формула для определения касательных напряжений при кручении имеет вид

$$\tau = T\rho/I_p. \quad (V.9)$$

Как видно из этой формулы, в точках, одинаково удаленных от центра сечения, напряжения τ одинаковы.

Наибольшие напряжения в точках у контура сечения

$$\tau_{\max} = Tr/I_p = T/W_p, \quad (\text{V.10})$$

где

$$W_p = I_p/r. \quad (\text{V.11})$$

Геометрическая характеристика W_p называется полярным моментом сопротивления или моментом сопротивления при кручении.

Для круглого сплошного сечения

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (\text{V.12})$$

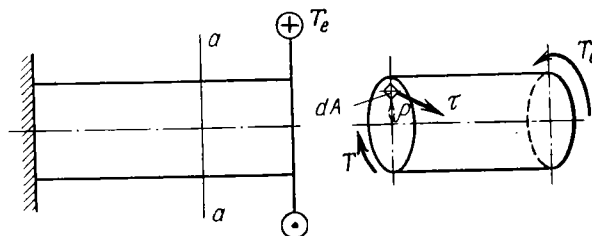


Рис. V.9

Для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2D^3 (1 - c^4), \quad (\text{V.13})$$

где $c = d/D$.

Условие статической прочности вала при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = T/W_p \leq \tau_{adm}. \quad (\text{V.14})$$

Здесь τ_{adm} — допускаемое касательное напряжение.

При действии статической нагрузки принимают (без учета концентрации напряжений и других факторов, снижающих прочность) $\tau_{adm} = (0,5 \div 0,6) \sigma_{adm}$.

Кроме проверки прочности по этой формуле можно также подбирать диаметр вала или определять допускаемый крутящий момент при известных остальных величинах.

Имея в виду, что для круглого сплошного сечения $W_p \approx 0,2d^3$, получаем

$$d = \sqrt[3]{T/(0,2\tau_{adm})} = 1,72 \sqrt[3]{T/\tau_{adm}}. \quad (\text{V.15})$$

По этой формуле определяют диаметр вала из условия прочности.

Допускаемый из условия прочности крутящий момент определяют по формуле

$$T_{adm} = W_p \tau_{adm} \quad (V.16)$$

Касательные напряжения действуют не только в поперечных сечениях стержня, но и (как это следует из закона парности касательных напряжений) в продольных (рис. V.10).

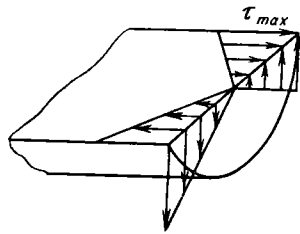


Рис. V.10

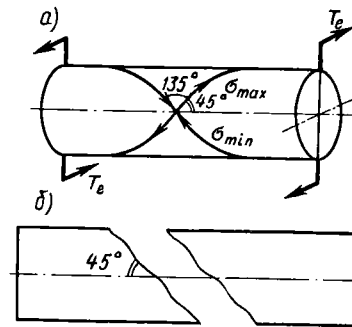


Рис. V.11

В наклонных же сечениях стержня действуют и нормальные и касательные напряжения. Они могут быть вычислены по формулам гл. II.

Наибольший интерес представляют главные напряжения. Их можно определить по формуле (II.36), приняв в ней $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$.

Таким путем обнаружим, что $\sigma_1 = \sigma_{max} = \tau$ и $\sigma_3 = \sigma_{min} = -\tau$, при этом первое является растягивающим, а второе — сжимающим. По формуле (II.35) найдем, что угол наклона главных площадок равен $\alpha'_0 = 45^\circ$ и $\alpha''_0 = 135^\circ$ (рис. V.11, а).

Опыты показывают, что хрупкие материалы, например чугун, при кручении разрушаются по плоскости (говоря точнее, по винтовой поверхности), наклоненной к оси вала под углом 45° (рис. V.11, б), т. е. по тем плоскостям, где действуют наибольшие растягивающие напряжения.

Следовательно, при кручении во всех точках стержня, кроме точек его оси (в которых вообще не возникает напряжений), имеет место двухосное напряженное состояние — **чистый сдвиг**. При кручении материал у поверхности стержня напряжен сильнее, чем материал, расположенный ближе к оси стержня. Таким образом, напряженное состояние является **неоднородным**. Если же скручивать тонкостенную трубу, то можно считать, что

практически во всех точках ее стенки возникают одинаковые напряжения, т. е. в этом случае напряженное состояние будет **однородным**. Опыты с кручением таких труб используют обычно для изучения чистого сдвига и, в частности, для установления предела текучести при сдвиге τ_y .

§ 37. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ ВАЛОВ

Для вычисления деформаций вала при кручении воспользуемся формулой (V.7):

$$d\phi = T dz / (GI_p). \quad (V.17)$$

Деформация вала на длине z (взаимный угол поворота сечений) равна

$$\phi = \int_0^z T dz / (GI_p). \quad (V.18)$$

Если крутящий момент и величина GI_p , называемая **жесткостью вала при кручении**, постоянны на всем участке интегрирования, то

$$\phi = Tz / (GI_p). \quad (V.19)$$

Аналогично, для вала длиной l получим

$$\phi = Tl / (GI_p). \quad (V.20)$$

Эта формула по своей структуре аналогична формуле для определения деформаций при растяжении — сжатии.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют **относительным углом закручивания**. Он равен

$$\gamma = \phi / l = T / (GI_p). \quad (V.21)$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания не превосходил допустимого, т. е.

$$\gamma = T / (GI_p) \leq \gamma_{adm}. \quad (V.22)$$

Эта формула выражает **условие жесткости** вала при кручении. В этой формуле γ_{adm} — допустимый относительный угол закручивания в радианах на единицу длины вала.

В большинстве случаев допустимый относительный угол закручивания задают в градусах на 1 м длины, тогда взамен формулы (V.22) получим

$$\gamma = \frac{180}{\pi} \frac{T}{GI_p} \leq \gamma_{adm}. \quad (V.23)$$

Угол γ_{adm} выбирают в зависимости от назначения вала и его размеров. Для валов средних размеров в «Справочнике машиностроителя» рекомендуется принимать допускаемый угол закручивания равным $0,5^\circ$ на 1 м длины.

Из условия (V.23) можно определить диаметр вала по заданной жесткости. Имея в виду, что $I_p \approx 0,1d^4$, получаем

$$d = \sqrt[4]{\frac{180T}{\pi G \theta, 1 \gamma_{adm}}} \quad (V.24)$$

§ 38. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Имея формулы для определения деформаций и зная условия закрепления стержня, нетрудно определить угловые перемещения сечений стержня и построить эпюры этих перемещений. Если имеется вал (т. е. вращающийся стержень), у которого нет

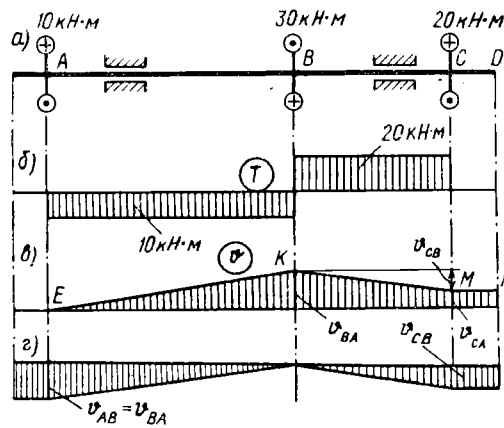


Рис. V.12

неподвижных сечений, то для построения эпюры угловых перемещений принимают какое-либо сечение за условно неподвижное.

Рассмотрим конкретный пример (рис. V.12, а). На рис. V.12, б дана эпюра T .

Примем сечение в точке A за условно неподвижное. Определим поворот сечения B по отношению к сечению A .

По формуле (V.20) найдем

$$\phi_{BA} = T_{AB} l_{AB} / (GI_p),$$

где T_{AB} — крутящий момент на участке AB ; l_{AB} — длина участка AB .

Примем следующее правило знаков для углов поворота сечений: углы ϑ будем считать положительными, когда сечение поворачивается (если смотреть вдоль оси справа налево) против часовой стрелки. В данном случае ϑ_{BA} будет положительным. В принятом масштабе отложим ординату ϑ_{BA} (рис. V.12, в). Полученную точку K соединяем прямой с точкой E , так как на участке AB углы изменяются по закону прямой линии [см. формулу (V.19)], в которую абсцисса сечения z входит в первой степени]. Вычислим теперь угол поворота сечения C по отношению к сечению B . Учитывая принятое правило знаков для углов закручивания, получаем

$$\vartheta_{CB} = -T_{BC} l_{BC} / (GI_p).$$

Так как сечение B не неподвижное, то угол поворота сечения C по отношению к сечению A равен

$$\vartheta_{CA} = \vartheta_{CB} + \vartheta_{BA} = -\frac{T_{BC} l_{BC}}{GI_p} + \vartheta_{BA}.$$

Угол закручивания ϑ_{CA} может получиться положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю.

Предположим, что в данном случае угол ϑ_{CA} получился положительным. Тогда, отложив его в принятом масштабе вверх от оси эпюры, получим точку M . Соединяя точку M с точкой K , получим график углов закручивания ϑ на участке BC . На участке CD скручивания не происходит, так как крутящие моменты на этом участке равны нулю, поэтому там все сечения поворачиваются на столько же, на сколько поворачивается сечение C . Участок MN эпюры ϑ здесь горизонтален. Читателю предлагается убедиться, что если принять за неподвижное сечение B , то эпюра углов закручивания будет иметь вид, представленный на рис. V.12, г.

Пример V.1. Определить диаметр стального вала, вращающегося с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с и передающего мощность $P = 100$ кВт. Допускаемое напряжение $\tau_{adm} = 40$ МПа, допускаемый угол закручивания $\gamma_{adm} = 0,5$ град/м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Момент, передаваемый валом, определяем по формуле

$$T_e = P / \omega = 100\,000 / 100 = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент во всех поперечных сечениях вала одинаков:

$$T = T_e = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

* Power (англ.) — мощность.

Диаметр вала по прочности определяем по формуле (V.15)

$$d = 1,72 \sqrt[3]{10^{-3}/40} = 0,05 \text{ м} = 5 \text{ см} = 50 \text{ мм.}$$

По формуле (V.24) определяем диаметр вала из условия жесткости:

$$d = \sqrt[4]{180 \cdot 10^{-3} / (3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 0,5)} = 0,052 \text{ м} = 5,2 \text{ см} = 52 \text{ мм.}$$

Диаметр вала в данном случае определяется из условия жесткости и должен быть принят равным $d = 52$ мм.

Пример V.2. Подобрать размеры сечения трубчатого вала, передающего момент $T_e = 6$ кН·м, при соотношении диаметров $c = d/D = 0,8$ и допускаемом напряжении $\tau_{adm} = 60$ МПа. Сравнить вес этого трубчатого вала с валом равной прочности сплошного сечения.

О т в е т. Размеры трубчатого вала: $D = 9,52$ см, $d = 7,62$ см. Площадь сечения $A_1 = 25,9$ см². Диаметр вала сплошного сечения $d_1 = 8$ см. Площадь сечения $A_2 = 50,2$ см². Масса трубчатого вала составляет 51% от массы сплошного вала.

§ 39. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении внешние моменты совершают работу вследствие поворота сечений, к которым они приложены. Эта работа расходуется на создание запаса потенциальной энергии деформации, численно равной работе внутренних сил.

Аналогично тому, как это было сделано при растяжении, можно доказать, что **работа статически приложенного внешнего скручивающего момента равна половине произведения конечного значения момента на окончательный угол закручивания:**

$$W = T_e \theta / 2. \quad (V.25)$$

Работа внутренних сил, отрицательная по знаку, и численно равная ей потенциальная энергия при кручении вычисляются аналогично тому, как вычислялась работа внутренних сил при растяжении (сжатии).

Элементарная работа внутренних сил

$$dW_i = -T d\theta / 2, \quad (V.26)$$

где T — крутящий момент; $d\theta$ — угол закручивания элемента длиной dz .

Но по формуле (V.7),

$$d\theta = T dz / (GI_\rho).$$

Следовательно,

$$dW_i = -T^2 dz / (2GI_\rho). \quad (V.27)$$

Полную работу внутренних сил получим, интегрируя выражение для элементарной работы по всей длине l стержня:

$$W_i = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2 dz}{GI_p}. \quad (V.28)$$

Для вычисления потенциальной энергии, равной по значению работе внутренних сил и обратной по знаку, имеем

$$U = -W_i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2 dz}{GI_p}. \quad (V.29)$$

Если крутящий момент и жесткость стержня не меняются по длине, то

$$U = T^2 l / (2GI_p). \quad (V.30)$$

§ 40. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

В стержнях некруглого сечения при кручении сечения не остаются плоскими, а **искривляются (депланируют)** (рис. V.13, а).

Если для такой деформации нет никаких препятствий, то в поперечных сечениях нормальных напряжений не возникает. Такое кручение называется **чистым** или **свободным**.

Свободное кручение возможно лишь при условии, что сечение стержня и крутящий момент постоянны, а концы стержня не заделаны.

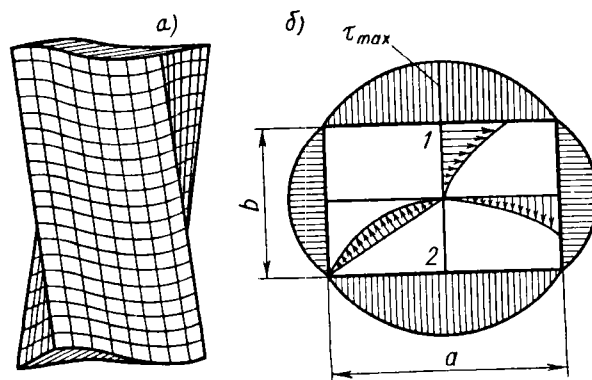


Рис. V.13

Определение касательных напряжений для стержней некруглого сечения представляет собой довольно сложную задачу, которая решается методами теории упругости. Приведем основные результаты для стержней прямоугольного сечения при $a > b$ (рис. V.13, б).

Максимальные касательные напряжения возникают в точках 1 и 2, т. е. посередине длинных сторон:

$$\tau_{\max} = T/(\alpha ab^2) = T/W_t; \quad (\text{V.31})$$

угол закручивания

$$\theta = Tl/(G\beta ab^3) = Tl/GI_t. \quad (\text{V.32})$$

Здесь α и β — коэффициенты, зависящие от соотношения сторон. Их значения приведены в табл. V.1.

Т а б л и ц а V.1

a/b	1	2	3	4	5	10	20	∞
α	0,21	0,25	0,27	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33
β	0,14	0,23	0,26	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33

Величины $W_t = \alpha ab^2$ и $I_t = \beta ab^3$ являются соответственно геометрическими характеристиками прочности и жесткости стержня прямоугольного сечения при кручении.

Как видно из табл. V.1, для узких прямоугольных сечений с отношением $a/b \geq 10$ можно принять $\alpha = \beta \approx 1/3$.

Распределение касательных напряжений по периметру сечения стержня, вдоль его осей и диагоналей сечения видно из рис. V.13, б. В угловых точках $\tau = 0$.

Для прочих профилей (эллиптического, круглого со шпоночной канавкой и др.) расчетные формулы приводятся в справочниках.

Для незамкнутых профилей, составленных из тонких и длинных прямоугольников ($a/b \geq 10$), геометрическую характеристику I_t можно вычислить по формуле

$$I_t = \frac{1}{3} \sum ab^3, \quad (\text{V.33})$$

где a — длина большей (длинной) стороны прямоугольника; b — длина меньшей (короткой) стороны прямоугольника.

Наибольшее касательное напряжение имеет место в прямоугольнике с наибольшей шириной и определяется по формуле

$$\tau_{\max} = T b_{\max} / I_t, \quad (\text{V.34})$$

где b_{\max} — наибольшее значение короткой стороны прямоугольника.

Угол закручивания определяется по формуле

$$\phi = Tl / (GI_t). \quad (V.35)$$

Для прокатных профилей значение I_t приводится в специальных таблицах. Следует отметить, что I_t для таких профилей (тонкостенных открытого профиля) очень мала по сравнению с I_t для стержней сплошного круглого сечения той же площади, не говоря уже о кольцевом сечении. Поэтому следует избегать работы стержней открытого профиля на кручение.

При **несвободном (стесненном)** кручении, когда деформация сечений затруднена, приведенные выше формулы непригодны. Общая теория стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля разработана В. З. В л а с о в ы м. Он показал, что при стесненном кручении кроме касательных напряжений чистого кручения, вычисляемых по приведенным выше формулам, в поперечном сечении возникают значительные дополнительные касательные и нормальные напряжения. Изложение теории стесненного кручения тонкостенных стержней выходит за пределы краткого курса сопротивления материалов.

§ 41. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

Значительно более жесткими и поэтому более целесообразными при кручении являются тонкостенные стержни замкнутого профиля.

Рассмотрим цилиндрический стержень, поперечное сечение которого представлено на рис. V.14. Толщину стенки t будем считать плавно изменяющейся вдоль линии контура, так что концентрацию напряжений можно не учитывать.

Геометрическое место точек, равноотстоящих от внешнего и внутреннего контуров поперечного сечения, называется **средней линией сечения**.

Ввиду незначительной толщины стенки можно принять, что возникающие при кручении касательные напряжения будут равномерно распределены по толщине стенки и направлены по касательной к средней линии сечения.

Можно показать также, что произведение касательного напряжения в какой-либо точке стенки на ее толщину есть величина, постоянная для всех точек осевой линии контура сечения, т. е. $\tau t = \text{const}$.

Для этого достаточно рассмотреть условие равновесия какого-либо элемента стержня, например элемента 1234 (рис. V.14).

В продольном сечении 1—4 действует парное касательное напряжение τ_1 , в сечении 2—3 — парное касательное напряжение τ_2 (направлено к ребру).

Спроецировав силы, действующие на элемент, на направленные оси стержня, получим $\tau_1 t_1 dz = \tau_2 t_2 dz$. Так как точки 3 и 4 взяты произвольно, то $\tau t = \text{const}$.

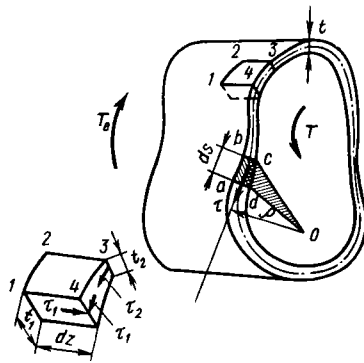


Рис. V.14

Теперь можно связать касательное напряжение с возникающим в сечении крутящим моментом.

Сила, действующая на элементарную площадь $t ds$ (рис. V.14), равна, очевидно, $\tau t ds$, а крутящий момент этой элементарной силы относительно произвольной точки O , лежащей в плоскости сечения, равен $\tau t ds \rho$, где ρ — плечо действия силы относительно точки O .

Сумма моментов относительно оси, параллельной образующей стержня и проходящей через точку O , равна крутящему моменту

$$T = \oint_s \tau t \rho ds,$$

где интегрирование распространяется на всю длину контура s ; но произведение ρds равно удвоенной площади треугольника Oab . Следовательно, $T = \int \tau t 2dA$. Произведение $2\tau t$, как величину постоянную, можно вынести за знак интеграла. Под интегралом остается выражение $\int dA$, что представляет собой площадь сплошного сечения, ограниченного средней линией сечения.

Тогда

$$T = \tau t 2A, \quad (\text{V.36})$$

откуда

$$\tau = T / (t 2A). \quad (\text{V.37})$$

Наибольшее напряжение будет в том месте, где толщина стенки минимальна:

$$\tau_{\max} = T / (2A t_{\min}). \quad (\text{V.38})$$

Угол закручивания ϕ для стержня длиной l определим из условия, что работа внешнего скручивающего момента равна

работе внутренних сил. Работа внешнего статически приложенного момента на угловом перемещении ϕ

$$W = T_e \phi / 2.$$

Вычислим теперь потенциальную энергию деформации, численно равную работе внутренних сил. Удельная потенциальная энергия при действии касательных напряжений определяется по формуле (III.2).

Потенциальная энергия для элемента объемом $l ds$ составит

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} l ds,$$

где l — длина стержня.

Полная потенциальная энергия для всего стержня

$$U = \frac{1}{2G} \oint \tau^2 l ds.$$

Интегрирование производится по длине s контура сечения.

Заменяя τ его значением из формулы (V.37), найдем

$$U = \frac{l}{2G} \oint \frac{T^2}{\beta^2 4A^2} t ds.$$

Вынесем постоянные величины за знак интеграла:

$$U = \frac{T^2 l}{8GA^2} \oint \frac{ds}{t}.$$

Учитывая, что потенциальная энергия U численно равна работе W внешнего момента, получим при $T = T_e$

$$\boxed{\phi = \frac{T_e l}{4GA^2} \oint \frac{ds}{t}} \quad (\text{IV.39})$$

Пример V.3. Определить наибольшее напряжение и угол закручивания трубчатого стержня (рис. V.15), если $T = T_e = 1500$ Н·м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа = $8 \cdot 10^{10}$ Па.

Решение. По формуле (V.38) находим

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= 1500 / (2 \cdot 3,5 \cdot 10^{-2} \cdot 7 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}) = 612 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2 = \\ &= 61,2 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

По формуле (V.39) определим угол закручивания на длине 1 м:

$$\phi = \frac{1500}{4 \cdot 3,5^2 \cdot 7^2 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{10}} \left(\frac{2 \cdot 3,5}{1} + \frac{2 \cdot 7}{0,5} \right) = 0,037 \text{ рад.}$$

Пример V.4. Определить наибольшее напряжение и угол закручивания того же стержня, если профиль будет открытым (т. е. если контур в одном месте будет разрезан).

Решение. Напряжение определяем по формуле (V.34)

$$\tau_{\max} = \frac{Tb_{\max}}{1/3 \sum ab^3} = \frac{1500 \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{1/3(2 \cdot 3,5 \cdot 1^3 + 2 \cdot 7 \cdot 0,5^3) \cdot 10^{-8}} = \frac{15 \cdot 10^8}{2,93} =$$

$$= 5,12 \cdot 10^8 \text{ Па} = 512 \text{ МПа} > 61,2 \text{ МПа}.$$

Заметим, что формула (V.39) справедлива лишь в пределах действия закона Гука.

Угол закручивания определяем по формуле (V.35):

$$\phi = 1500 \cdot 1 / (8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 2,93 \cdot 10^{-8}) =$$

$$= 0,64 \text{ рад} > 0,037 \text{ рад}.$$

Сравнение результатов двух рассмотренных примеров подтверждает преимущества стержней замкнутого профиля по сравнению со стержнями открытого профиля при работе на кручение.

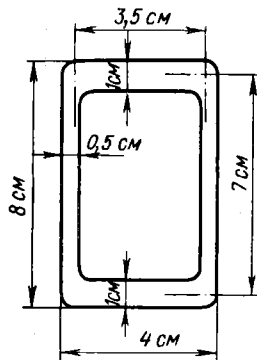


Рис. V.15

§ 42. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

При кручении, так же как и при растяжении, встречаются задачи, которые не могут быть решены с помощью одних только уравнений равновесия. В таких задачах количество неизвестных превышает число уравнений равновесия. Порядок решения таких задач тот же самый, что и при решении статически неопределимых задач при растяжении (сжатии).

Рассмотрим для примера стержень с двумя заделанными концами (рис. V.16, а). Такой стержень статически неопределим, так как для нахождения двух реактивных моментов, возникающих в заделках, статика дает лишь одно уравнение равновесия.

Отбросим одну заделку, заменив ее действия неизвестным моментом X (рис. V.16, б). Дополнительное уравнение (называемое, как известно, уравнением деформации или уравнением перемещений) получим из условия, что угол поворота сечения у отброшенной заделки, равный углу закручивания стержня под действием моментов T_e и X , равен нулю ($\phi_B = 0$).

В получившейся статически определимой системе, называемой основной системой, поворот сечения B происходит под

действием внешнего момента и момента X . Угол поворота сечения B под действием момента X

$$\vartheta_B = \frac{Xa}{GI'_p} + \frac{Xb}{GI''_p},$$

где $I'_p \approx 0,1d_1^4$; $I''_p \approx 0,1d_2^4$.

Угол поворота сечения B под действием момента T_e

$$\vartheta_B = -T_e a / (GI_p).$$

Подставляя эти значения в уравнение перемещений, получаем

$$\vartheta_B = 0; \quad \frac{Xa}{GI'_p} + \frac{Xb}{GI''_p} - \frac{T_e a}{GI'_p} = 0.$$

Отсюда определяем X .

После этого можно определить крутящий момент в любом сечении и построить эпюры T и эпюры углов закручивания. Для построения эпюры ϑ достаточно вычислить угол поворота сечения C :

$$\begin{aligned} \vartheta_C &= -Xb / (GI''_p) = \\ &= -(T_e - X)a / (GI'_p). \end{aligned}$$

Углы поворота сечений A и B равны нулю, а так как угол поворота сечения линейно зависит от расстояния [см. формулу (V.19)], то полученные точки эпюры можно соединить прямыми линиями. Эпюры T и ϑ представлены на рис. V.16, a, z .

Пример V.5. Тонкостенная трубка из материала с модулем G_1 вставлена в другую с модулем G_2 . Один конец получившейся конструкции заделан, а к другому приложен внешний момент T_e , действующий на обе трубки (рис. V.17). Определить крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях трубок.

Решение. Незвестных крутящих моментов два: во внутренней трубке — T_1 и в наружной трубке — T_2

Уравнение равновесия одно

$$T_1 + T_2 = T_e. \quad (1)$$

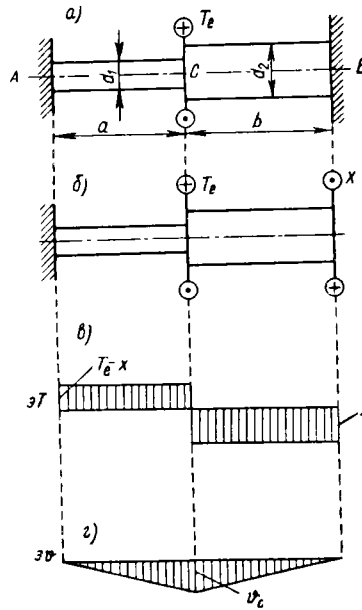


Рис. V.16

Задача один раз статически неопределима. Составляем уравнение деформаций, приравнявая между собой углы поворота сечений на правом конце трубок (равные полным углам закручивания трубок):

$$\phi_1 = \phi_2$$

или

$$T_1 l / (G_1 I_{\rho_1}) = T_2 l / (G_2 I_{\rho_2}). \quad (II)$$

Полярный момент инерции сечения внутренней трубки — I_{ρ_1} наружной — I_{ρ_2} . Они определяются, как для кольцевых сечений, по формулам

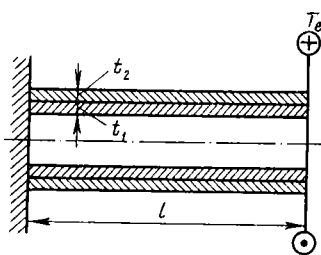


Рис. V.17

§ 30. При небольшой толщине стенок для вычисления углов закручивания можно пользоваться формулой (V.39), которая при постоянной толщине t получит вид

$$\phi = Tls / (4GA^2t) = 4Tl / (G\pi d_m^3),$$

где $d_m = (d_2 + d_1) / 2$ — средний диаметр трубки; $s = \pi d_m$ — длина средней окружности сечения трубки.

Из двух уравнений (I) и (II) определяем крутящие моменты в поперечных сечениях трубок, а затем по формуле (V.37) — и напряжения. При значительной толщине стенок для определения напряжений следует пользоваться формулами § 36.

§ 43. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

При резком изменении контура поперечного или продольного сечения вала возникает **концентрация напряжений**. Влияние концентрации напряжений учитывается **коэффициентом концентрации**, который определяется либо теоретически — методами теории упругости, либо экспериментально.

На рис. V.18 дан график для определения значения теоретического коэффициента концентрации напряжений α_r при кручении вала с сопряжением частей по круговой галтели радиуса r . Как видим, при резких переходах, т. е. при малых значениях r/d , α_r сильно возрастает.

При известном коэффициенте концентрации напряжений максимальное касательное напряжение для стержня круглого поперечного сечения определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \alpha_r \tau_{\text{ном}} = \alpha_r T / W_p,$$

где $\tau_{\text{ном}} = T / W_p$ — номинальное напряжение, вычисляемое по наименьшему сечению.

Влияние концентрации напряжений учитывается: а) при

действии статических нагрузок для материалов малопластичных и склонных к хрупкому разрушению; б) при действии переменных нагрузок (расчет на выносливость) для всех материалов.

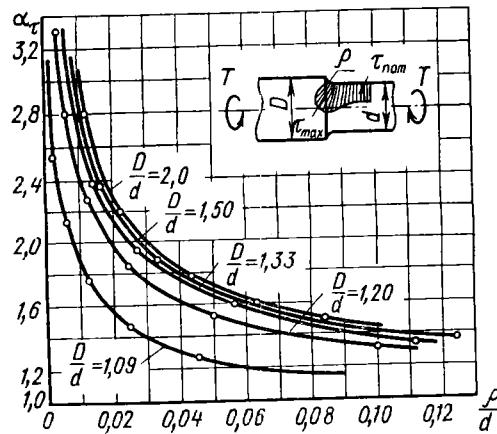


Рис. V.18

Для уменьшения концентрации напряжений следует избегать резких изменений контура сечения, применяя в местах ступенчатого изменения диаметра стержня переходные кривые возможно большего радиуса.

§ 44. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СЕЧЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Из двух сечений с одним и тем же полярным моментом сопротивления (или в случае некруглого сечения одним и тем же W_t), а следовательно, и с одним и тем же допускаемым крутящим моментом рациональным будет сечение с наименьшей площадью, т. е. обеспечивающее наименьший расход материала. Так как отношение W_p/A (или W_t/A) — величина размерная, то для сравнения различных сечений удобно применять безразмерную величину

$$\omega_p = W_p / \sqrt{A^3}$$

(при некруглом сечении $\omega_t = W_t / \sqrt{A^3}$), которую называют **удельным моментом сопротивления при кручении**. Чем больше ω_t , тем рациональнее сечение.

В табл. V.2 приведены значения ω_t для некоторых сечений.

Как видим, наименее выгодными при кручении являются швеллеры, двутавры, узкие прямоугольные сечения и наиболее

Таблица V.2

Тип сечения	ω_1
Швеллер	0,04—0,05
Двутавр	0,05—0,07
Прямоугольное сечение при $a/b = 10$	0,1
То же, $a/b = 2$	0,18
Квадрат	0,21
Круглое сплошное сечение	0,28
Круговое кольцо при:	
$c = d/D = 0,5$	0,37
$c = 0,9$	1,16

выгодными — круглые кольцевые, особенно при малой толщине стенок.

Сравним площадь стержней трубчатого сечения A_2 с площадью стержней сплошного сечения A_1 при различных значениях $c = d/D$ и при условии равной прочности. Из равенства полярных моментов сопротивления сплошного и кольцевого сечений имеем

$$\pi d_1^3/16 = \pi D^3 (1 - c^4)/16.$$

Для равнопрочности должно соблюдаться условие

$$D = d_1/\sqrt[3]{1 - c^4}.$$

Отношение площадей сечения

$$A_2/A_1 = \pi(D^2 - d^2)/4 : \pi d_1^2/4 = D^2 (1 - c^2)/d_1^2.$$

Подставляя сюда значение D , найденное из условия равнопрочности, получаем

$$A_2/A_1 = (1 - c^2)/\sqrt[3]{(1 - c^4)^2}.$$

В табл. V.3 приведены значения отношения A_2/A_1 , вычисленные по этой формуле при различных значениях $c = d/D$.

Из этой таблицы видно, что применение трубчатых тонкостенных стержней дает большую экономию металла.

При подборе сечений по жесткости в качестве критерия экономичности профиля может служить безразмерная величина

$$j_p = I_p/A^2.$$

Таблица V.3

c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
A_2/A_1	1	0,99	0,96	0,92	0,85	0,79	0,70	0,61	0,51	0,39

Т а б л и ц а V.4

Тип сечения	j_t
Швеллер	0,010—0,011
Двутавр	0,009—0,015
Прямоугольное сечение при $a/b=10$	0,031
То же, $a/b=2$	0,115
Квадрат	0,14
Круглое сечение сплошное	0,16
Круговое кольцо при:	0,264
$c=d/D=0,5$	1,22
$c=0,9$	

(или $j_t = I_t/A^2$ для некруглых сечений), которую называют **удельным полярным моментом инерции** или удельной геометрической характеристикой крутильной жесткости.

В табл. V.4 приведены значения j_t для некоторых наиболее распространенных сечений.

Как видим, при расчете на жесткость преимущества кольцевых тонкостенных сечений по сравнению с другими типами сечений еще более возрастают. Сравнение площадей стержней круглого кольцевого и сплошного сечений при одинаковой жесткости представлено в табл. V.5. В этой таблице A_2 — площадь сечения стержня кольцевого (трубчатого) сечения, A_1 — площадь сечения стержня сплошного круглого сечения.

Т а б л и ц а V.5

c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
A_2/A_1	1	0,99	0,96	0,92	0,85	0,78	0,69	0,58	0,46	0,32

Сравнивая эту таблицу с табл. V.3, видим, что при расчете на жесткость применение трубчатых тонкостенных стержней позволяет получить еще большую экономию материала.

ИЗГИБ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 45. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА

Весьма часто стержни подвергаются действию поперечной нагрузки или внешних пар (рис. VI.1).

При этом в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты, т. е. внутренние моменты, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости поперечного сечения стержня.

При действии такой нагрузки ось стержня искривляется.

Указанный вид нагружения называют **изгибом**, а стержни, работающие в основном на изгиб, — **балками**.

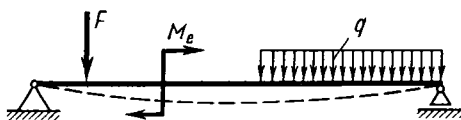


Рис. VI.1

Изгиб называют чистым, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении стержня.

Чаще, однако, в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Такой изгиб называют **поперечным**.

Если плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения стержня, изгиб носит название **простого** или **плоского** (применяется также название **прямой изгиб**).

Если плоскость действия изгибающего момента в сечении не совпадает ни с одной из главных осей сечения, изгиб называют **косым**.

Далее будет показано, что при плоском изгибе ось балки и после деформации остается в плоскости внешних сил — силовой плоскости. При косом изгибе плоскость деформации не совпадает с силовой плоскостью.

Изучение деформации изгиба начнем со случая чистого простого изгиба; в дальнейшем рассмотрим более общий случай изгиба — поперечный изгиб. Косой изгиб относится к сложному сопротивлению стержней и будет рассмотрен в гл. IX.

§ 46. ТИПЫ ОПОР БАЛОК

Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают трех основных типов.

1. **Подвижная шарнирная опора** (рис. VI.2, а). Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникнуть только одна реакция, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через центр катка.

Схематическое изображение подвижной шарнирной опоры дано на рис. VI.2, б.

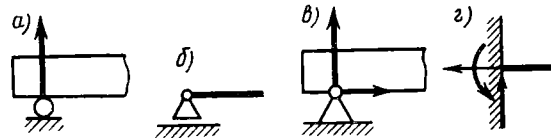


Рис. VI.2

Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину при изменении температуры и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

2. **Неподвижная шарнирная опора** (рис. VI.2, в). Такая опора допускает вращение конца балки, но устраняет поступательное перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на две составляющие — горизонтальную и вертикальную.

3. **Жесткая заделка, или защемление** (рис. VI.2, г). Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникнуть реакция, которую обычно раскладывают на две составляющие (вертикальную и горизонтальную) и момент защемления (реактивный момент).

Балка с одним заделанным концом называется **консольной балкой** или просто **консолью**.

Если опорные реакции могут быть найдены из одних уравнений статики, то балки называют **статически определимыми**. Если же число неизвестных опорных реакций больше, чем число

уравнений статики, возможных для данной задачи, то балки называют **статически неопределимыми**. Для определения реакций в таких балках приходится составлять дополнительные уравнения — уравнения перемещений.

§ 47. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

Рассмотрим несколько примеров.

Пример VI.1. Определить опорные реакции консольной балки (рис. VI.3).

Решение. Реакцию заделки представляем в виде двух сил A_z и A_y , направленных, как указано на чертеже, и реактивного момента M_A .

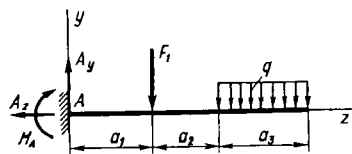


Рис. VI.3

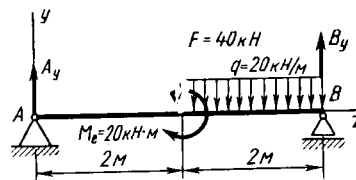


Рис. VI.4

Составляем уравнение равновесия балки.

1. Приравняем нулю сумму проекций на ось z , всех сил, действующих на балку: $\Sigma Z = 0$. Получаем $A_z = 0$. При отсутствии горизонтальной нагрузки горизонтальная составляющая равна нулю.

2. То же, на ось $\Sigma Y = 0$. Равномерно распределенную нагрузку q заменим равнодействующей qa_3 , приложенной посередине участка a_3 :

$$A_y - F_1 - qa_3 = 0, \text{ откуда } A_y = F_1 + qa_3.$$

Вертикальная составляющая реакции в консольной балке равна сумме сил, приложенных к балке.

3. Составляем третье уравнение равновесия. Приравняем нулю сумму моментов всех сил, относительно какой-нибудь точки, например относительно точки A :

$$\Sigma M_A = 0; \quad -M_A - F_1 a_1 - qa_3 (a_1 + a_2 + a_3/2) = 0,$$

откуда

$$M_A = -F_1 a_1 - qa_3 (a_1 + a_2 + a_3/2).$$

Знак минус показывает, что принятое вначале направление реактивного момента следует изменить на обратное. Итак, реактивный момент в заделке равен сумме моментов внешних сил относительно заделки.

Пример VI.2. Определить опорные реакции двухопорной балки (рис. VI.4). Такие балки обычно называют простыми.

Решение. Так как горизонтальная нагрузка отсутствует, то $A_z = 0$.

$$1. \sum M_B = 0; -A_y \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 1 - 20 = 0; A_y = 25 \text{ кН.}$$

$$2. \sum M_A = 0.$$

$$B_y \cdot 4 - 40 \cdot 3 - 40 \cdot 2 - 20 = 0; B_y = 55 \text{ кН.}$$

Вместо второго уравнения можно было использовать условие $\sum Y = 0$, которое в данном случае следует применить для проверки решения:

$$\sum Y = 0; 25 - 40 - 40 + 55 = 0, \text{ т. е.}$$

тождество.

Пример VI.3. Определить реакции опор балки ломаного очертания (рис. VI.5).

Решение.

$$1. \sum M_A = 0; -F a + B_y a = 0;$$

$$B_y = F.$$

$$2. \sum Z = 0; -A_z + F = 0; A_z = F.$$

$$3. \sum Y = 0; A_y + B_y = 0;$$

$A_y = -B_y = -F$, т. е. реакция A_y направлена не вверх, а вниз. Для проверки правильности решения можно использовать, например, уравнение $\sum M_B = 0$.

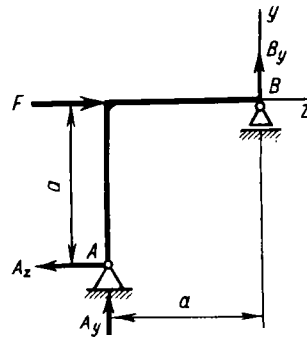


Рис. VI.5

§ 48. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Как уже было сказано, при плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия (внутренних силовых фактора) — изгибающий момент M и поперечная сила Q . Для их определения применим метод сечений.

В интересующем нас месте сделаем мысленный разрез балки, например на расстоянии z от левой опоры (рис. VI.6, а). Отбросим одну из частей балки, например правую, и рассмотрим равновесие левой части.

Взаимодействие частей балки заменим внутренними усилиями: изгибающим моментом M и поперечной силой Q (рис. VI.6, б).

Для определения M и Q используем два уравнения равновесия:

$$1. \sum Y = 0; A - F_1 + Q = 0;$$

$$Q = F_1 - A, \quad Q = \sum (F_i)_y.$$

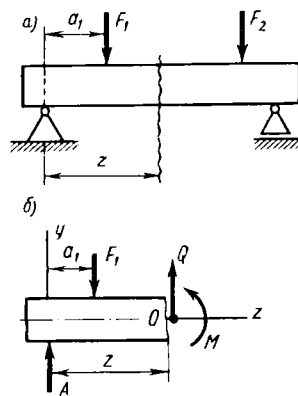


Рис. VI.6

$$2. \Sigma M_0 = 0; Az - F_1(z - a_1) - M = 0;$$

$$M = Az - F_1(z - a_1); M = \Sigma m_0(F_i).$$

Таким образом,

1) поперечная сила Q в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения;

2) изгибающий момент в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов (вычисленных относительно центра тяжести сечения) внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.

§ 49. ПРАВИЛО ЗНАКОВ ДЛЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

Поперечная сила в сечении балки $m - n$ (рис. VI.7, а) считается **положительной**, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа — сверху вниз, и **отрицательной** — в противоположном случае (рис. VI.7, б).

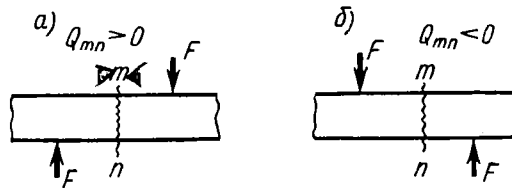


Рис. VI.7

Изгибающий момент в сечении балки, например в сечении $m - n$ (рис. VI.8, а), считается **положительным**, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа — против часовой стрелки, и **отрицательным** — в противоположном случае (рис. VI.8, б). Моменты, изображенные на рис. VI.8, а, изгибают балку выпуклостью вниз, а моменты, изображенные на рис. VI.8, б, изгибают балку

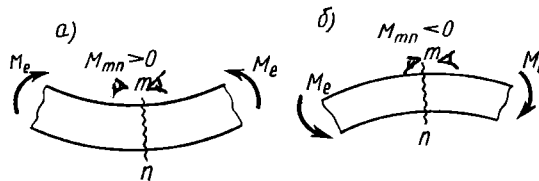


Рис. VI.8

выпуклостью вверх. Это можно легко проверить, изгибая тонкую линейку.

Отсюда следует другое, более удобное для запоминания правило знаков для изгибающего момента. **Изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз.** Далее будет показано, что волокна балки, расположенные в вогнутой части, испытывают сжатие, а в выпуклой — растяжение. Таким образом, уславливаясь откладывать положительные ординаты эпюры M вверх от оси, мы получаем, что эпюра оказывается построенной со **стороны сжатых волокон балки.**

§ 50. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки легко установить определенную зависимость.

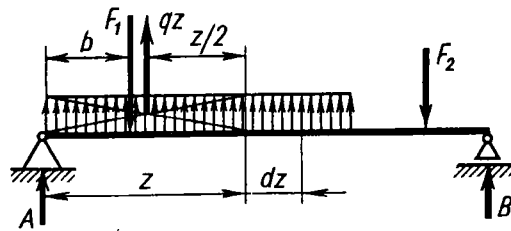


Рис. VI.9

Рассмотрим балку, нагруженную произвольной нагрузкой (рис. VI.9). Определим поперечную силу в сечении, отстоящем от левой опоры на расстоянии z . Проецируя на вертикаль силы, расположенные левее сечения, получаем

$$Q = A - F_1 + qz. \quad (a)$$

Аналогично вычислим поперечную силу в смежном сечении, расположенном на расстоянии $z + dz$ от левой опоры:

$$Q + dQ = A - F_1 + q(z + dz). \quad (б)$$

Вычитая (а) из (б), получаем $dQ = qdz$, откуда

$$\boxed{q = dQ/dz}, \quad (VI.1)$$

т. е. производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Вычислим теперь изгибающий момент в сечении с абсциссой z , взяв сумму моментов сил, приложенных слева от сечения. Для этого распределенную нагрузку на участке длиной z заменим ее равнодействующей, равной qz и приложенной в середине участка, на расстоянии $z/2$ от сечения:

$$M = Az - F_1(z - b) + qz(z/2). \quad (в)$$

Аналогично вычислим изгибающий момент в смежном сечении, отстоящем от левой опоры на расстоянии $z + dz$:

$$M + dM = A(z + dz) - F_1(z + dz - b) + q(z + dz)^2/2. \quad (г)$$

Вычитая (в) из (г), получаем приращение изгибающего момента

$$dM = Adz - F_1 dz + qz dz = dz(A - F_1 + qz).$$

Выражение в скобках представляет собой поперечную силу Q . Следовательно,

$$dM = Q dz,$$

откуда

$$\boxed{Q = dM/dz}, \quad (VI.2)$$

т.е. производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе (теорема Журавского).

Взяв производную от обеих частей равенства (VI.2), получим

$$\boxed{dQ/dz = d^2M/dz^2 = q}, \quad (VI.3)$$

т.е. вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Полученные зависимости будем использовать в дальнейшем главным образом при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

§ 51. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

Для наглядного представления о характере изменения изгибающего момента и поперечной силы по длине балки и для нахождения опасных сечений строят эпюры M и Q . Технику построения этих эпюр разъясним на следующих примерах.

Пример VI.4. Построить эпюры M и Q для балки, изображенной на рис. VI.10, а.

Решение. Проводим сечение справа от силы на расстоянии z_1 от правого конца балки (сечение $I - I$); z_1 — величина переменная, индекс I обозначает номер участка, на котором сделано сечение.

Изгибающий момент в сечении $I - I$ проще всего определить, взяв сумму моментов внешних сил, расположенных справа от сечения. Получим $M = 0$. Этот результат справедлив для всех сечений участка BC .

Изгибающий момент в сечении $II - II$ на участке AB вычислим так же, как сумму моментов всех правых от сечения сил; тогда не надо будет определять опорные реакции в заделке. Получим*

$$M_{z_2} = -F(z_2 - a_2); \quad (a_2 \leq z_2 \leq a_1 + a_2).$$

Абсциссу второго сечения можно было отсчитывать не от точки C , а от какой-либо другой точки, например точки B . Однако это не дало бы каких-либо преимуществ.

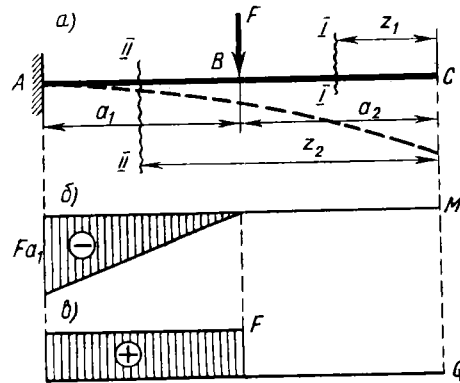


Рис. VI.10

Знак минус взят потому, что балка изгибается выпуклостью вверх. Мы получили уравнение наклонной прямой линии. Для построения эпюры вычисляем два значения M_2 :

$$M_{z_2=a_2} = 0; \quad M_{z_2=a_1+a_2} = -Fa_1.$$

Величину Fa_1 в выбранном масштабе откладываем вниз от оси эпюры. Эюра M представлена на рис. VI.10, б. Наибольший изгибающий момент возникает в сечении у заделки: $M_{\max} = -Fa_1$.

Вычислим теперь поперечную силу в сечении $I - I$. Проецируя на вертикальную ось силы, расположенные справа от сечения, получаем $Q_{z_1} = 0$. Для сечения $II - II$ тем же путем получим $Q_{z_2} = F$. Знак плюс взят потому, что внешняя сила справа от сечения направлена сверху вниз. Эюра Q показана на рис. VI.10, в.

* Применяемые ниже обозначения Q_z и M_z подчеркивают, что поперечная сила и изгибающий момент являются функциями абсциссы поперечного сечения балки.

Для определения знака поперечной силы может быть наряду с изложенным выше правилом предложено также следующее правило: поперечная сила Q положительна на тех участках балки, где эпюра M восходящая (при движении слева направо), и отрицательна на тех участках, где эпюра M нисходящая.

Пример VI.5. Построить эпюры M и Q для консольной балки (рис. VI.11, а).

Решение. Здесь два участка (AB и BC), различающихся характером нагружения, а следовательно, и законами изменения M и Q .

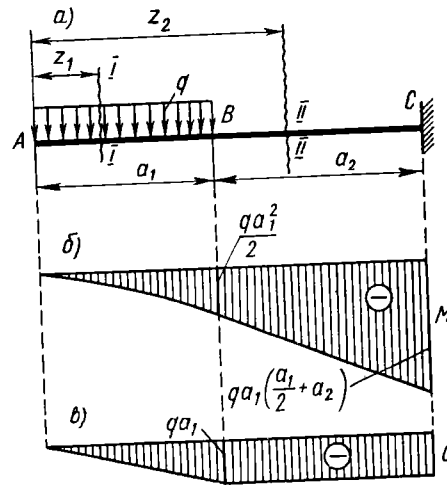


Рис. VI.11

Изгибающий момент на участке AB в сечении, взятом на расстоянии z_1 от точки A , найдем как момент левых сил, для чего распределенную нагрузку левее сечения заменяем ее равнодействующей qz_1 , приложенной в середине участка длиной z_1 . Получим

$$M_{z_1} = -qz_1 (z_1/2) = -qz_1^2/2.$$

Знак минус взят потому, что балка изгибается выпуклостью вверх. Это уравнение параболы. Параболу построим приближенно по трем точкам:

$$M_{z_1=0} = 0; \quad M_{z_1=a_1/2} = -qa_1^2/8; \quad M_{z_1=a_1} = -qa_1^2/2.$$

Делаем сечение на участке BC на расстоянии z_2 от свободного конца балки. Распределенную нагрузку на длине a_1 заменяем ее равнодействующей qa_1 , приложенной в середине участка AB . Момент в сече-

нии II — II

$$M_{z_2} = -qa_1(z_2 - a_1/2).$$

Это уравнение прямой. Вычисляем M_{z_2} при двух значениях z_2 :

$$z_2 = a_1 \text{ и } z_2 = a_1 + a_3.$$

Тогда получим

$$M_B = -qa_1^2/2, \quad M_C = -qa_1(a_1/2 + a_2).$$

Эпюра M дана на рис. VI.11, б.

Поперечная сила в сечении I — I как сумма проекций на вертикаль левых от сечения сил равна

$$Q_{z_1} = -qz_1.$$

Ее можно найти и по формуле (VI.2):

$$Q_{z_1} = \frac{dM_{z_1}}{dz_1} = -qz_1.$$

Поперечная сила в сечении II — II равна $Q_{z_2} = -qa_1$.

Эпюра Q дана на рис. VI.11, в.

В обоих случаях поперечная сила взята со знаком минус, потому что эпюра M — нисходящая (при движении слева направо). Следует также обратить внимание на следующую зависимость, вытекающую из формулы (VI.2). На тех участках балки, где изгибающий момент изменяется по параболе (кривая 2-го порядка), поперечная сила изменяется по линейному закону, т. е. эпюра — наклонная прямая (линия 1-го порядка). Там же, где M изменяется по линейному закону, т. е. эпюра M — наклонная прямая, поперечная сила Q постоянна, эпюра — горизонтальная прямая (линия нулевого порядка). Вообще, порядок функции, описывающей закон изменения Q , на единицу ниже порядка функции, выражающей закон изменения M . Это следует непосредственно из формулы (VI.2).

Пример VI.6. Построить эпюры M и Q для двухопорной балки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. VI. 12, а, б, в).

Решение. Вследствие симметрии нагружения балки реакции равны между собой:

$$A = B = ql/2.$$

Изгибающий момент в сечении с абсциссой z равен

$$M_z = qlz - qz^2/2.$$

Первый член представляет собой изгибающий момент от реакции, взятый со знаком плюс, так как, мысленно закрепив балку в рассматриваемом сечении, можно убедиться, что от действия реакции часть балки слева от сечения изогнется выпуклостью вниз. Второй член представляет собой изгибающий момент от равномерно распределенной нагрузки, расположенной левее проведенного сечения. Равнодействующая этой

нагрузки равна qz и приложена в середине участка, т. е. на расстоянии $z/2$ от сечения. Следовательно, момент от этой нагрузки равен $qz^2/2$ со знаком минус, так как такая нагрузка изогнет балку (мысленно закрепленную в сечении) выпуклостью вверх. Полученное уравнение для изгибающего момента есть уравнение параболы. Вычисляем три ординаты эпюры M :

$$M_{z=0} = 0; \quad M_{z=l/2} = ql^2/8; \quad M_{z=l} = 0.$$

По этим данным строим эпюру M . Максимальный изгибающий момент (в середине балки) $M_{\max} = ql^2/8$.

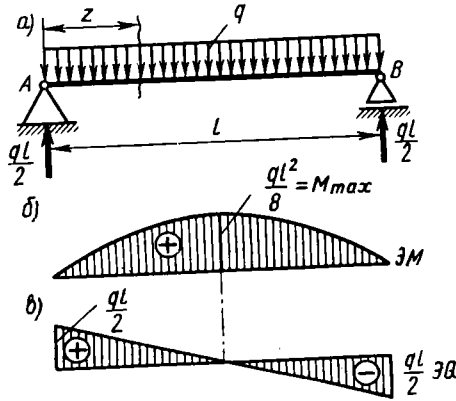


Рис. VI.12

Этот результат полезно запомнить, так как им часто приходится пользоваться при расчетах. Продифференцировав выражение для M_z и приравняв первую производную нулю, убедимся в том, что максимум M действительно имеет место посередине пролета балки. Поперечная сила в сечении (как сумма левых сил)

$$Q_z = ql/2 - qz.$$

Тот же результат получается и по формуле (VI.2). Вычисляем два значения

$$Q_{z=0} = ql/2; \quad Q_{z=l} = -ql/2.$$

Строим эпюру Q . Обращаем внимание, что $Q=0$ посередине пролета балки, т. е. там, где изгибающий момент максимален, как это и следует из зависимости (VI.2).

Пример VI.7. Построить эпюры M и Q для консольной балки (рис. VI.13, а, б, в).

Решение. Изгибающий момент на участке DC (как сумма моментов левых сил) $M_z = 0$.

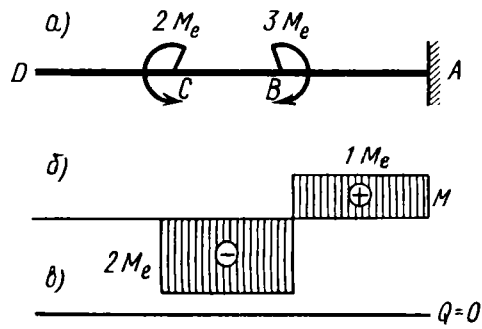


Рис. VI.13

На участке CB имеем $M_z = -2M$. На участке BA имеем $M_z = -2M + 3M = M$.

Во всех сечениях поперечная сила $Q=0$.

Пример VI.8. Построить эпюру M и Q для балки, изображенной на рис. VI.14, а, б, в.

Решение. Используя уравнения равновесия, определяем реакции: $R_A = 20$ кН и направлена вниз, $R_B = 140$ кН и направлена вверх.

Изгибающий момент в сечении с абсциссой z_1 определяем как сумму моментов левых сил:

$$M_{z_1} = -20z_1 - 20z_1^2/2.$$

Это уравнение параболы. Вычисляем три значения M_{z_1} :

$$M_{z_1=0} = 0; \quad M_{z_1=1 \text{ м}} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z_1=2 \text{ м}} = -80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

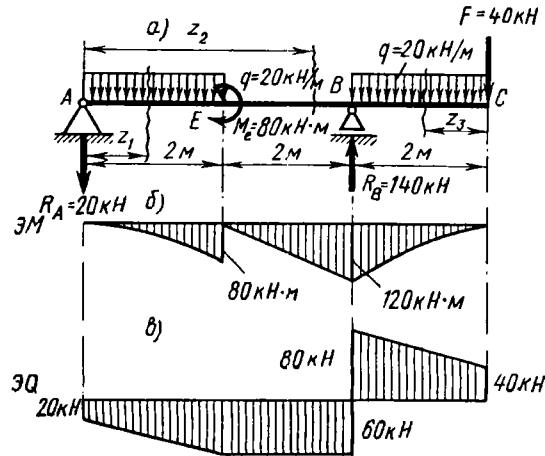


Рис. VI.14

По этим данным строим эпюру M на участке AE . Определяем изгибающий момент в сечении с абсциссой z_2

$$M_{z_2} = -20z_2 - 40(z_2 - 1) + 80.$$

Второй член этого выражения представляет собой изгибающий момент от равнодействующей распределенной нагрузки, действующей на участке AE . Эта равнодействующая равна 40 кН, а ее расстояние от рассматриваемого сечения — $(z_2 - 1)$ м.

Дадим z два значения: $z = 2$ м и $z = 4$ м. После подстановки получаем

$$M_{z_2=2} = 0; \quad M_{z_2=4} = -120 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По этим данным построена эпюра M на участке BE .

Определяем изгибающий момент в сечении, отстоящем на расстоянии z_3 от правого конца балки. Так как справа от указанного сечения внешних сил меньше, чем слева, то проще вычислить M_{z_3} как сумму моментов правых сил:

$$M_{z_3} = -40z_3 - 20z_3^2/2.$$

Первый член представляет собой изгибающий момент от силы $F = 40$ кН, а второй — от распределенной нагрузки, действующей правее рассматриваемого сечения.

Оба члена взяты со знаком минус, так как балка, мысленно закрепленная в сечении, где определяется M , изогнулась бы под действием правых от сечения нагрузок выпуклостью вверх.

Давая значение $z_3 = 0$ и $z_3 = 2$ м, получим эпюру M для участка BC .

Поперечную силу определяем, используя зависимость $Q_z = \frac{dM_z}{dz}$ или проецируя на вертикаль силы, действующие на отсеченную часть. Для контроля правильности вычислений рекомендуется использовать оба способа.

Беря производную от M_{z_1} , получаем

$$Q_{z_1} = \frac{d}{dz_1} \left(-20z_1 - \frac{20z_1^2}{2} \right) = -20 - 20z_1.$$

Это уравнение прямой линии. Тот же результат получаем, проецируя на вертикаль силы, расположенные слева или справа от сечения с абсциссой z_1 .

Поперечная сила в произвольном сечении участка EB

$$Q_{z_2} = dM_{z_2}/dz_2 = -60 \text{ кН}.$$

Эпюра Q на втором участке имеет вид горизонтальной прямой линии. При вычислении Q_z как производной от момента M_{z_3} следует иметь в виду, что z_3 отсчитывается справа налево, и поэтому, как известно из

математики, для получения правильного знака Q следует после дифференцирования изменить знак:

$$Q_{z_3} = 40 + 20z_3.$$

По этому уравнению прямой построена эпюра Q для участка BC . Разрывы в эпюре Q равны приложенным в соответствующих сечениях балки сосредоточенным силам: реакциям A и B , а также силе F (на правом конце).

Пример VI.9. Построить эпюры M и Q и продольной силы N для ломаной балки, изображенной на рис. VI.15, а.

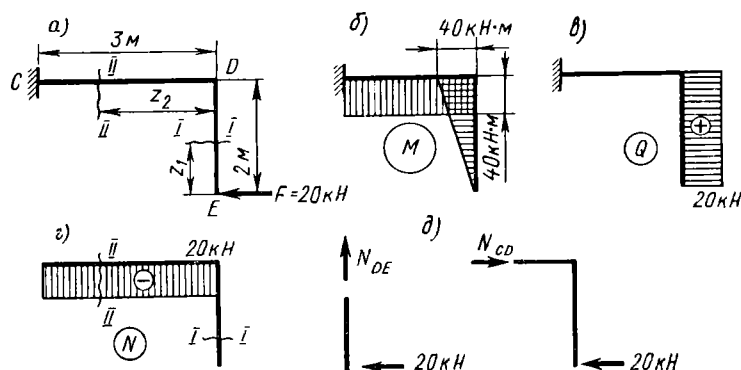


Рис. VI.15

Решение. Общий метод определения M , Q и N в любом сечении тот же самый. Однако здесь необходимо условиться о правиле построения эпюр для вертикальных и наклонных стержней. Принято для всех стержней эпюру M строить на вогнутой стороне стержня (на сжатом волокне), т. е. соблюдать правило, принятое при построении эпюр для горизонтально расположенных стержней. Изгибающий момент в сечении $I-I$, вычисленный как сумма моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения (снизу), $M_{z_1} = Fz_1$. Если мысленно наложить заделку в сечении $I-I$ на нижнюю отсеченную часть стержня, то становится очевидным, что изгиб происходит выпуклостью вправо, т. е. сжатое волокно находится слева. Поэтому эпюру M_{z_1} строим слева (рис. VI.15, б). При $z_1 = 0$ $M = 0$; при $z_1 = 2$ м $M = 40$ кН·м.

Изгибающий момент в сечении $II-II$ как сумма моментов правых от разреза сил равен произведению силы на расстояние до сечения, равное отрезку DE :

$$M_{z_2} = 2 \cdot 20 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При этом сжатое волокно будет снизу (рис. VI.15, б).

Поперечную силу можно определить, используя зависимость (VI.2):

$$Q_z = \frac{dM_z}{dz},$$

т. е. определить Q как тангенс угла наклона касательной к эпюре моментов. Для стержня CD изгибающий момент $M = \text{const}$, следовательно, $Q = 0$. Для стержня DE

$$Q = 40/2 = 20 \text{ кН.}$$

Можно, конечно, поперечную силу определить и как сумму проекций на направление, перпендикулярное оси стержня сил, действующих по одну сторону от сечения.

Знак поперечной силы устанавливается по прежнему правилу. Если при взгляде на стержень DE слева направо эпюра M — восходящая, то Q — положительна. График положительных значений Q строим справа (рис. VI.15, в).

Продольную силу N определяем, применяя метод сечений (рис. VI.15, з).

Для стержня DE (рис. VI.15, д), проецируя силы, приложенные к нему ниже сечения $I - I$, на направление оси стержня DE получаем $N_{DE} = 0$.

Для стержня CD , проецируя силы, приложенные правее сечения $II - II$, на направление оси стержня CD , получаем $N_{CD} = 20 \text{ кН}$ (сжатие).

Отрицательные значения N откладываем вниз от оси стержня. Знак минус означает сжатие (рис. VI.15, з).

§ 52. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

При чистом плоском (простом) изгибе в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты в плоскости, проходящей через одну из главных осей поперечного сечения балки.

Изгибающий момент представляет собой равнодействующий момент внутренних нормальных сил, распределенных по сечению.

Чтобы установить закон распределения и значения внутренних сил, возникающих в поперечном сечении балки, уравнений статики недостаточно. Необходимо использовать условия деформации балки.

Если подвергнуть чистому плоскому изгибу балку (образец) с нанесенной на ее поверхности сеткой, то обнаружится следующее (рис. VI.16):

1) линии — $1-1$ и $2-2$ на поверхности балки после деформации повернутся на некоторый угол $d\theta$, оставаясь прямыми. Можно полагать, что и

поперечные сечения балки, плоские до деформации, останутся плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений). Расчеты, основанные на таком предположении, согласуются с опытом. Поскольку прямоугольная сетка остается прямоугольной и после деформации, можно принять, что касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю;

2) волокно ab на выпуклой стороне балки удлиняется, что свидетельствует о растяжении этого волокна, а волокно ef укорачивается, что свидетельствует о его сжатии. Длина же волокна cd останется без изменения, что свидетельствует о том, что это волокно не испытывает ни растяжения, ни сжатия.

Слой балки (на уровне волокна cd), не испытывающий при изгибе ни растяжения, ни сжатия, называется **нейтральным слоем**. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки (рис. VI.17) называется **нейтральной осью (линией)**. Пересечение силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения называется **силовой линией**.

Из рассмотренных результатов опытов следует, что волокна балки деформируются различно: большие деформации испытывают волокна, более удаленные от нейтрального слоя. Покажем, что по высоте сечения балки деформации изменяются по линейному закону.

Действительно, отрезок $b'b''$ представляет полное удлинение волокна ab , длина которого до деформации равна длине волокна cd , принадлежащего нейтральному слою (см. рис. VI.16). Относительное удлинение этого волокна

$$\epsilon = b'b''/ab = b'b''/cd = yd\theta/\rho d\theta = y/\rho, \quad (VI.4)$$

где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя балки (значение ρ пока неизвестно); y — расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна.

Прежде чем переходить к определению напряжений, введем еще одну гипотезу, а именно: предположим, что волокна балки не оказывают давления друг на друга, т. е. напряжения в направлении, перпендикулярном оси балки, равны нулю. Следовательно, каждое волокно испытывает одноосное растяжение или сжатие. Формула, получаемая на основании этой гипотезы, дает результаты, хорошо согласующиеся с данными опытов. Тогда по закону Гука для одноосного напряженного состояния получим

$$\sigma = E\epsilon = Ey/\rho, \quad (VI.5)$$

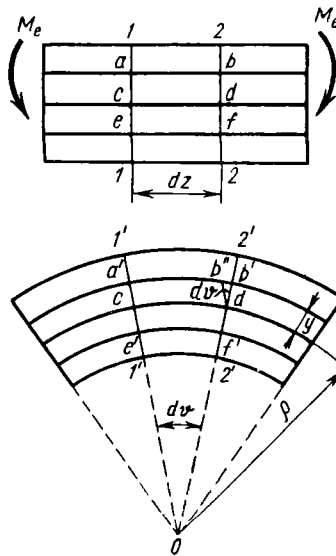


Рис. VI.16

т. е. нормальные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения балки пропорционально расстоянию от нейтральной оси. Наибольшие напряжения будут у верхнего и нижнего краев сечения.

Эпюра σ показана на рис. VI.17. Растягивающие напряжения считаем положительными.

Следует подчеркнуть, что векторы нормальных напряжений перпендикулярны плоскости поперечного сечения балки, а отрезки, изображающие их на эпюре, условно совмещены с плоскостью сечения.

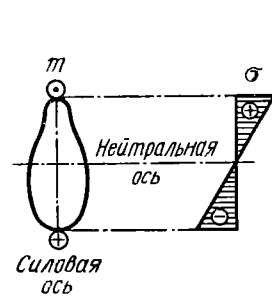


Рис. VI.17

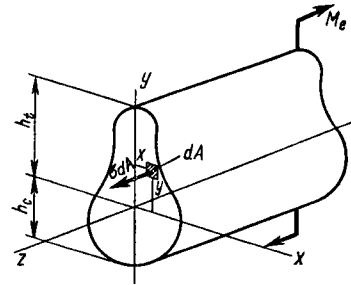


Рис. VI.18

Установив закон распределения напряжений, можно определить и их значение из уравнений равновесия. Рассмотрим равновесие части балки, находящейся под действием внешнего момента M_e и внутренних сил, возникающих в проведенном поперечном сечении (рис. VI.18). При равновесии этой части балки должны соблюдаться шесть уравнений равновесия: равенство нулю суммы проекций действующих сил на три оси координат и равенство нулю трех сумм моментов относительно осей x , y , z :

1. Приравниваем нулю сумму проекций на ось y : $\Sigma Y = 0$.

2. То же самое — на ось x : $\Sigma X = 0$.

$\Sigma Y = 0$ и $\Sigma X = 0$ обращаются в тождества, так как внутренние силы σdA перпендикулярны этим осям.

3. Приравниваем нулю сумму проекций на ось z :

$$\Sigma Z = 0 \text{ или } \int y dA = 0.$$

Используя формулу (VI.5), получаем

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0.$$

Но $E/\rho \neq 0$, так как $\rho \neq \infty$, ибо рассматривается изогнутая балка.

$$\text{Следовательно, } \int_{\lambda} y \, dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси. Он равен нулю, и, следовательно, **нейтральная ось при изгибе проходит через центр тяжести сечения.**

4. Уравнение $\Sigma M_z = 0$ обращается в тождество, так как внутренние усилия $\sigma \, dA$ параллельны оси z .

5. Уравнение $\Sigma M_y = 0$ дает $\int_{\lambda} \sigma \, dAx = 0$. Используя формулу (VI.5), получаем

$$\frac{E}{\rho} \int_{\lambda} xy \, dA = 0.$$

Но $E/\rho \neq 0$, следовательно, $\int_{\lambda} xy \, dA = 0$. Интеграл $I_{xy} \equiv D_{xy} = \int xy \, dA$ представляет собой центробежный момент инерции сечения относительно осей x и y . Так как он равен нулю, то оси x и y должны быть главными осями сечения и момент M_e должен лежать в плоскости, проходящей через одну из главных осей, что и выполняется при плоском изгибе. Из этого условия следует также, что **силовая линия и нейтральная ось (нулевая линия) взаимно перпендикулярны.**

6. Приравниваем нулю суммы моментов сил относительно оси x :

$$\Sigma M_x = 0; \quad -M_e + \int_{\lambda} y \sigma \, dA = 0.$$

Используя формулу (VI.5), получаем

$$M_e = \frac{E}{\rho} \int_{\lambda} y^2 \, dA.$$

Интеграл $I_x = \int_{\lambda} y^2 \, dA$ представляет собой момент инерции сечения относительно нейтральной оси x .

На отсеченную часть балки может действовать не одна внешняя пара, а несколько, а также любая другая нагрузка.

В этом случае уравнение равновесия $\Sigma M_x = 0$ содержит алгебраическую сумму моментов от всех этих сил, равную изгибающему моменту в поперечном сечении — M .

Имея в виду сказанное, последнее соотношение представим в виде

$$M = EI_x / \rho, \quad (VI.6)$$

откуда

$$1/\rho = M / (EI_x). \quad (VI.7)$$

Величина $K = 1/\rho$ представляет собой **кривизну нейтрального слоя балки**.

Несколько выше было показано, что нейтральная линия поперечного сечения проходит через его центр тяжести. Следовательно, ось (продольная ось) балки, являющаяся геометрическим местом центров тяжести ее поперечных сечений, расположена в нейтральном слое. Таким образом, получаем, что выражение (VI.7) определяет кривизну оси балки.

Итак, **кривизна оси балки при изгибе пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна величине EI_x , называемой жесткостью балки**.

Подставляя найденное значение $1/\rho$ в (VI.5), получим важную формулу

$$\sigma = My / I_x,$$

(VI.8)

позволяющую определить нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки по известным изгибающему моменту M и моменту инерции сечения.

Формула (VI.8) выведена для чистого изгиба.

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают и нормальные, и касательные напряжения.

Возникновение касательных напряжений сопровождается появлением деформаций сдвига, в результате чего поперечные сечения балки перестают быть плоскими (гипотеза Бернулли теряет силу). Кроме того, при поперечном изгибе возникают напряжения в продольных сечениях балки, т. е. имеет место надавливание волокон друг на друга.

Более детальные исследования показывают, что, несмотря на это, формула (VI.8) дает вполне надежные результаты и при поперечном изгибе.

**§ 53. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПО НОРМАЛЬНЫМ
НАПРЯЖЕНИЯМ**

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения при изгибе в опасном сечении, т. е. в сечении, где M имеет наибольшее значение, не превосходили соответствующих допускаемых напряжений (рассматриваются только балки с постоянным по всей длине поперечным сечением).

Обозначим (рис. VI.18) h_t — расстояние до наиболее удаленного от нейтральной оси растянутого волокна, h_c — расстояние до наиболее сжатого волокна. Тогда наибольшее растягивающее напряжение при изгибе

$$\max \sigma_t = Mh_t/I_x; \quad (\text{VI.9})$$

наибольшее сжимающее напряжение (взятое по абсолютному значению)

$$\max \sigma_c = Mh_c/I_x. \quad (\text{VI.10})$$

Для хрупких материалов (например, чугуна) допускаемые напряжения на растяжение и сжатие различны: σ_{adm}^c в 3—5 раз больше σ_{adm}^t , поэтому для балок из таких материалов обычно применяют сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. При этом сечение располагают таким образом, чтобы $h_t < h_c$, т. е. чтобы обеспечивалось неравенство $\max \sigma_t < \max \sigma_c$. В указанных случаях надо составлять два условия прочности: по наибольшим растягивающим напряжениям

$$\max \sigma_t = Mh_t/I_x = M/W_{x,t} \leq \sigma_{adm}^t; \quad (\text{VI.11})$$

по наибольшим сжимающим напряжениям

$$\max \sigma_c = Mh_c/I_x = M/W_{x,c} \leq \sigma_{adm}^c \quad (\text{VI.11a})$$

где $W_{x,t}$ и $W_{x,c}$ — моменты сопротивления растянутого и сжатого волокон.

В формулы (VI.11), (VI.11a) надо подставлять наибольшее (по абсолютному значению) значение M .

Если сечение балки симметрично относительно нейтральной оси (такие сечения целесообразно применять для балок из пластичных материалов), т. е. $h_t = h_c = h/2$, то вместо двух формул (VI.9) и (VI.10) получим одну

$$\sigma = (M/I_x) (h/2). \quad (\text{VI.12})$$

Обозначив $W_x = 2I_x/h$, получим при одинаковых допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие σ_{adm} следующее

условие прочности:

$$\sigma = M/W_x \leq \sigma_{adm}. \quad (VI.13)$$

Величина W_x называется осевым моментом сопротивления или моментом сопротивления при изгибе. Момент сопротивления является геометрической характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее прочность при изгибе.

Значения W_x для простейших сечений следующие:
для прямоугольника

$$W_x = 2I_x/h = bh^3/(12h/2) = bh^2/6;$$

для круга

$$W_x = 2I_x/d = \pi d^4/(64d/2) = \pi d^3/32 \approx 0,1d^3;$$

для кольца

$$W_x = \frac{2I_x}{D} = \frac{\pi D^4(1-c^4)}{64D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1-c^4) \approx 0,1D^3(1-c^4);$$

для прокатных сечений (двутавры, швеллеры и т. п.) значения W_x указаны в таблицах сортамента. Для подбора сечения балки из уравнения (VI.13) получим зависимость

$$W_x \geq M/\sigma_{adm}. \quad (VI.14)$$

Допускаемый изгибающий момент определяется по формуле

$$M_{adm} \leq W_x \sigma_{adm}. \quad (VI.15)$$

Найдя по этой формуле допускаемый изгибающий момент и зная связь между M и нагрузкой (по построенной эпюре M), можно определить допускаемую нагрузку.

Пример VI.10. Подобрать сечение балки двутаврового профиля пролетом $l=6$ м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. VI.12) $q=40$ кН/м, $\sigma_{adm}=160$ МПа $=160 \cdot 10^3$ кПа.

Решение. Для этого случая наибольший изгибающий момент имеет место в среднем сечении балки:

$$M = \frac{ql^2}{8} = 40 \cdot 36/8 = 180 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Требуемый момент сопротивления

$$W_x = M/\sigma_{adm} = 180/160 \cdot 10^3 = 0,001125 \text{ м}^3 = 1125 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента выбираем двутавр № 45, у которого $W_x = 1231 \text{ см}^3$ (при этом W_x будет недонапряжение $<5\%$, что допустимо).

В этом и в дальнейших примерах пользуемся таблицами нового сортамента (по ГОСТ 8239—72).

Пример VI.11. Определить допускаемую нагрузку балки прямоугольного поперечного сечения (рис. VI.19), если $\sigma_{adm} = 10$ МПа, $a = 1$ м.

Решение. Определяем допускаемый изгибающий момент

$$M_{adm} = W_x \sigma_{adm} = \frac{bh^2}{6} \sigma_{adm} = \frac{12 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}}{6} \cdot 10 = 0,0115 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Чтобы определить допускаемую нагрузку, необходимо знать зависимость между наибольшим изгибающим моментом и нагрузкой, для чего необходимо построить эпюру изгибающих моментов.

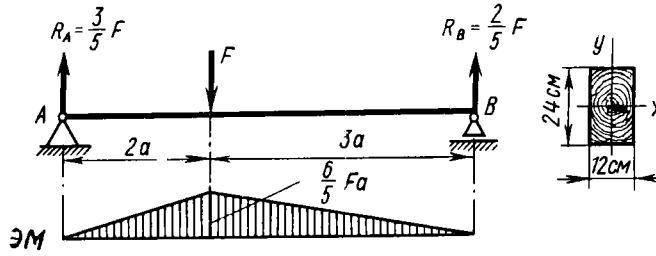


Рис. VI.19

Определяя реакции, найдем, что

$$R_A = 3/5 F; \quad R_B = 2/5 F.$$

Наибольший изгибающий момент будет в сечении под грузом:

$$M = R_A \cdot 2a = 6/5 Fa.$$

Теперь можем определить допускаемую нагрузку:

$$F_{adm} = \frac{5}{6a} M_{adm} = \frac{5}{6 \cdot 1} \cdot 0,0115 = 0,0096 \text{ МН} = 9,6 \text{ кН} = 9600 \text{ Н}.$$

§ 54. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В общем случае изгиба (при поперечном изгибе) в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Наличие изгибающего момента связано с возникновением в поперечных сечениях балки нормальных напряжений, для определения которых можно пользоваться формулой (VI.8) (см. § 52).

Наличие поперечной силы связано с возникновением касательных напряжений в поперечных сечениях балки, а по закону парности касательных напряжений — и в ее продольных сечениях (рис. VI.20). Для определения касательных напряжений рассмотрим вначале балку прямоугольного сечения небольшой

ширины (рис. VI.21). Вырежем из балки элемент длиной dz и шириной, равной ширине b балки. На этот элемент действуют следующие силы: по грани $344'3'$ действуют нормальные напряжения, которые согласно формуле (VI.8) равны

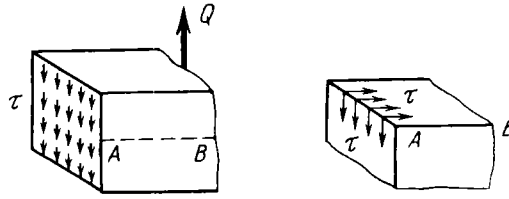


Рис. VI.20

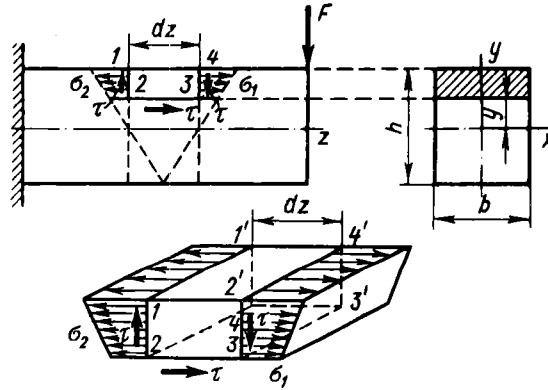


Рис. VI.21

$$\sigma_1 = M_1 y / I_x, \quad (a)$$

где M_1 — изгибающий момент в сечении $344'3'$.

Кроме того, в указанном сечении действуют неизвестные пока касательные напряжения τ , которые ввиду незначительной ширины сечения балки можно считать равномерно распределенными по ширине сечения*;

по грани $122'1'$ действуют нормальные напряжения

$$\sigma_2 = M_2 y / I_x \quad (б)$$

и касательные напряжения τ ;

* Это допущение носит название гипотезы Журавского.

по грани $322'3'$ действуют только касательные напряжения, по закону парности равные касательным напряжениям, действующим по вертикальным граням.

Составим уравнение равновесия отсеченного элемента балки. Спроецируем силы, действующие на элемент, на горизонтальную ось. Очевидно, касательные усилия, действующие по вертикальным граням, в указанное уравнение не войдут.

Касательное усилие по грани $233'2'$ спроецируется в истинную величину $\tau b dz$. Нормальные усилия, действующие по грани $344'3'$, имеют равнодействующую

$$N_1 = \int_{A'} \sigma_1 dA.$$

Нормальные усилия, действующие по грани $122'1'$, имеют равнодействующую

$$N_2 = \int_{A'} \sigma_2 dA.$$

Интегралы должны быть взяты по площади отсеченной части, т. е. по площади граней $122'1'$ и $344'3'$.

Используя уравнение равновесия $\Sigma Z = 0$, получаем

$$-N_2 + N_1 + \tau b dz = 0$$

или

$$-\int_{A'} \sigma_2 dA + \int_{A'} \sigma_1 dA + \tau b dz = 0.$$

Используя выражения (а) и (б), имеем

$$-\frac{M_2}{I_x} \int_{A'} y dA + \frac{M_1}{I_x} \int_{A'} y dA + \tau b dz = 0.$$

Выражение $\int_{A'} y dA = S'_x$ представляет собой **статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси**. Следовательно,

$$\frac{S'_x}{I_x} (M_2 - M_1) = \tau b dz.$$

Но $M_2 - M_1 = dM_2$ — приращение изгибающего момента на длине dz . Так что предыдущую формулу можно переписать

в виде

$$S'_x dM_z/I_x = \tau b dz,$$

откуда

$$\tau = S'_x dM_z/(I_x b dz).$$

Используя зависимость (VI.2), окончательно получаем

$$\tau = QS'_x/(I_x b). \quad (\text{VI.16})$$

Эта зависимость впервые была установлена Д. И. Журавским и поэтому называется его именем*.

Исследуем закон распределения по сечению касательных напряжений для балки прямоугольного сечения (рис. VI.22). Этот закон определяется законом изменения S'_x , так как остальные величины для данного сечения постоянны, причем

$$I_x = bh^3/12.$$

Статический момент заштрихованной площади относительно оси x

$$S'_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Это уравнение параболы. Касательное напряжение

$$\tau = \frac{Qb (h^2/4 - y^2) 12}{bh^3 \cdot 2b} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Построим эпюру τ по трем точкам:

$$\tau_{y=h/2} = 0; \quad \tau_{y=0} = 3Q/(2A); \quad \tau_{y=-h/2} = 0.$$

Эпюра τ показана на рис. VI.22. Наибольшее касательное напряжение для балки прямоугольного сечения имеет место на уровне нейтральной оси

$$\tau_{\max} = 3Q/(2A), \quad (\text{VI.17})$$

т. е. в 1,5 раза больше того напряжения, которое получилось бы в предположении равномерного распределения касательных напряжений по сечению.

* В таблицах сортамента для двутавров и швеллеров (см. приложение) приведены данные о статическом моменте половины площади этих профилей.

С известным приближением формулу Журавского можно применять для вычисления касательных напряжений в балках при поперечных сечениях другой формы. Для круглого сечения получим аналогичным способом эпюру τ , показанную на рис. VI.23, с максимальным значением на нейтральной оси:

$$\tau_{\max} = 4Q/(3A). \quad (\text{VI.18})$$

Для кольцевого сечения

$$\tau_{\max} = 2Q/A. \quad (\text{VI.19})$$

Следует подчеркнуть, что по формуле Журавского определяются касательные напряжения, параллельные поперечной силе,

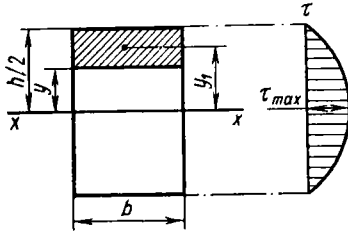


Рис. VI.22

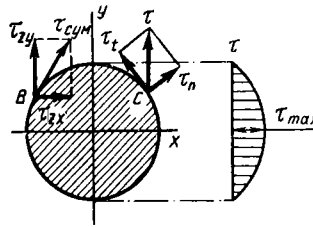


Рис. VI.23

т. е. в данном случае вертикальные τ или τ_{zy} (рис. VI.23). Полные же касательные напряжения должны быть направлены по касательной к контуру сечения.

Рассмотрим, например, точку C вблизи контура круглого сечения (рис. VI.23). Если предположить, что по формуле Журавского найдено полное напряжение τ , то, раскладывая его, получим две составляющие: по нормали к контуру (τ_n) и по касательной (τ_t).

Однако по условиям нагружения поверхность стержня свободна от напряжений, поэтому τ_n должно быть равно нулю. Следовательно, напряжение τ , найденное по формуле Журавского, не может быть полным касательным напряжением, оно представляет собой лишь его вертикальную составляющую τ_{zy} (рис. VI.23, точка B). Горизонтальная составляющая полного напряжения τ_{zx} и само полное напряжение τ_{tot} в таких точках контура остаются неизвестными, так как они не могут быть найдены методами сопротивления материалов. (На рис. VI.23 полное напряжение обозначено $\tau_{сум}$.)

Анализ точных решений теории упругости показывает, что в большинстве случаев горизонтальные составляющие касательных напряжений невелики.

Для балок двутаврового сечения эпюра τ имеет ступенчатый вид из-за резкого изменения ширины балки* (рис. VI.24, а). Максимальное касательное напряжение в двутавровом сечении имеет место в точках нейтральной оси и определяется по формуле Журавского, при этом следует брать статический момент заштрихованной площади (полусечения). В таблицах сортамента приведены значения статического момента площади полусечения для двутавров и швеллеров. На рис. VI.24, б, в показаны эпюры τ для некоторых других сечений.

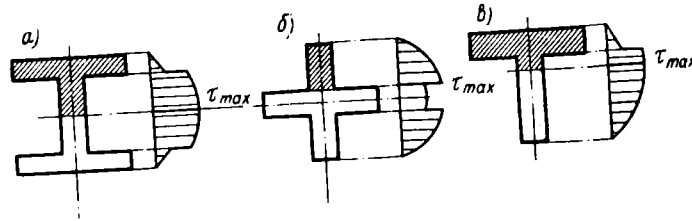


Рис. VI.24

Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm},$$

где τ_{adm} — допустимое касательное напряжение. Для стальных балок $\tau_{adm} \approx 0,6\sigma_{adm}$.

Некоторые материалы (например, дерево вдоль волокон) очень плохо сопротивляются сдвигу, поэтому для балок, изготовленных из таких материалов, проверка прочности по касательным напряжениям является обязательной.

Изложенная теория определения касательных напряжений справедлива лишь для сплошных сечений.

В тонкостенных стержнях, как уже было упомянуто, даже при совпадении силовой плоскости с одной из главных центральных осей сечения может наблюдаться явление закручивания. Чтобы лучше понять это, рассмотрим консольную балку корытного профиля (рис. VI.25, а).

* Следует иметь в виду, что часть эпюры, относящаяся к полкам балки, имеет весьма условный характер, так как гипотеза о равномерности распределения касательных напряжений по ширине сечения здесь неприменима. Учитывая это, эпюру τ в поперечных сечениях двутавровых балок, как правило, строят лишь в пределах стенки.

Отрежем плоскостью I часть балки с грузом и посмотрим на отсеченную часть со стороны заделки — увидим сечение, показанное на рис. VI.25, б. В вертикальной стенке касательные напряжения τ_y определяются по формуле Журавского (VI.16).

Если пренебречь (по малости) касательными напряжениями τ_y в полках, то равнодействующая касательных напряжений τ_y в стенке дает силу R_2 , равную Q (рис. VI.25, в).

В горизонтальных полках возникают касательные напряжения τ_x . Если принять, что они распределены по толщине стенки (ввиду малого ее размера) равномерно, то для их определения также можно использовать формулу Журавского (VI.16).

В какой-либо точке K сечения (рис. VI.25, б) касательные напряжения равны

$$\tau_x = QS'_x / (I_x t),$$

где t — толщина полки в точке K ; $S'_x = F'h_1/2$ — статический момент относительно оси отсеченной площади полки F' ; I_x — момент инерции сечения; Q — поперечная сила в сечении.

Наибольшее напряжение в полке τ_{\max} будет в месте соединения полки со стенкой. Для этого случая $S'_x = bth_1/2$. Следовательно,

$$\tau_{\max} = Qb_1 h_1 / (2I_x).$$

Равнодействующая касательных напряжений в полке R_1 равна произведению площади эпюры касательных напряжений на толщину полки:

$$R_1 = \tau_{\max} tb_1/2 = Qb_1^2 h_1 t / (4I_x).$$

На нижнюю полку действует такая же сила R_1 , но направленная в противоположную сторону. Две силы R_1 образуют пару с моментом

$$M_1 = R_1 h_1 = Qb_1^2 h_1^2 t / (4I_x).$$

Следовательно, в сечении швеллера наряду с вертикальной поперечной силой $Q = R_2$ возникает также крутящий момент $T = M_1$, который закручивает балку (рис. VI.25, б).

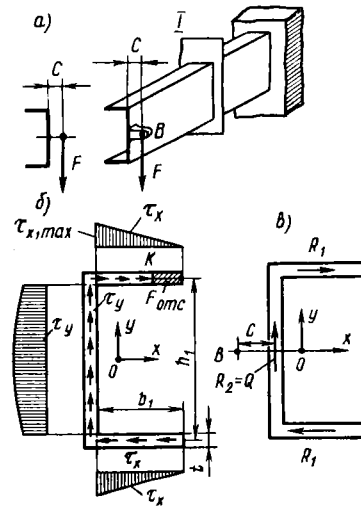


Рис. VI.25

Существует такая точка B сечения, относительно которой момент касательных сил в сечении при изгибе равен нулю. Эта точка называется **центром изгиба**. Положение этой точки можно найти из уравнения

$$\sum M_B = T - Qc = 0,$$

откуда $c = T/Q$.

Подставляя значение $T = M_1$, найдем

$$c = b_1^2 h_1^2 t / 4I_x.$$

Следовательно, для того чтобы при изгибе не возникало кручения, необходимо внешнюю силу прикладывать в центре изгиба (рис. VI.25, а). В этом случае сумма моментов внешних и внутренних сил относительно любой точки поперечного сечения равна нулю.

Отметим, что если сечение имеет две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

§ 55. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ БАЛКИ. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Установлено, что в поперечных сечениях балки действуют нормальные и касательные напряжения, а в продольных сечениях — только касательные*.

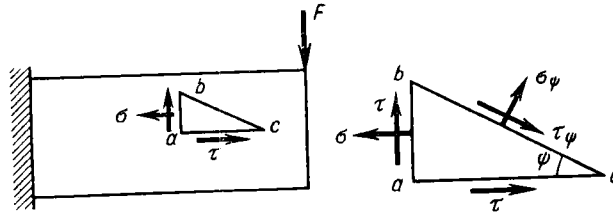


Рис. VI.26

В наклонных сечениях балки, например по площадке bc (рис. VI.26), возникают и нормальные, и касательные напряжения, для вычисления которых можно использовать формулы § 16.

Для определения главных напряжений воспользуемся формулой (II.37):

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \sigma/2 \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2.$$

* Для прокатных профилей в пределах полки, имеющей малую толщину, касательные напряжения невелики и их на эпюрах τ не показывают (см. рис. VI.27).

Угол наклона главных площадок определяется по формуле (II.35):

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = 2\tau/\sigma.$$

Наибольшие касательные напряжения, действующие на площадках, образующих с главными площадками угол $\pm 45^\circ$, определяются по формуле (II.32):

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2.$$

Из этой формулы видно, что главные напряжения $\sigma_{\frac{\max}{\min}}$ и наибольшие касательные $\tau_{\frac{\max}{\min}}$ бу-

дут иметь наибольшее значение в таких точках поперечного сечения балки, в которых имеются значительные нормальные и касательные напряжения. Для двутавра, например, главные напряжения проверяют обычно в точке *B* (верхней или нижней точке соединения стенки с полками) (рис. VI.27). Однако представляет интерес исследовать, не будет ли опасная точка перемещаться вниз при увеличении касательных напряжений.

Эту интересную задачу предлагаем студенту для самостоятельного исследования.

Ясно также, что по длине балки главные напряжения следует проверять в таких сечениях, где одновременно имеют большие значения и изгибающий момент (определяющий σ), и поперечная сила (определяющая τ).

§ 56. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

В местах резкого изменения контура продольного сечения балки картина распределения напряжений резко меняется, возникает концентрация напряжений (рис. VI.28, *a*).

Для уменьшения концентрации напряжений необходимо устранить резкие изменения контура продольного сечения балки, применяя плавные переходы, так называемые галтели (рис. VI.28, *б*).

Влияние концентрации напряжений на статическую прочность для малопластичных и хрупких материалов оценивается или **теоретическим коэффициентом концентрации напряжений** α_σ , вычисляемым методами теории упругости, или **эффективным коэффициентом концентрации** K_σ , определяемым опытным пу-

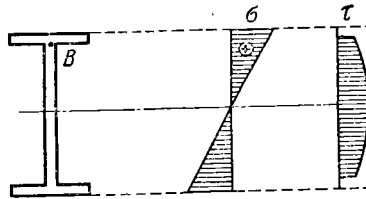


Рис. VI.27

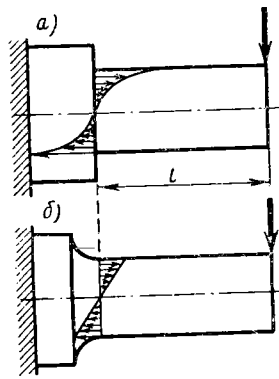


Рис. VI.28

тем. Для этого находят предел прочности при изгибе для образца без концентрации напряжений σ_u и то же, для образца с концентрацией $\sigma_{u,k}$.

Отношение $K_\sigma = \sigma_u / \sigma_{u,k}$ определяет эффективный коэффициент концентрации для образца. Значения K_σ приводятся в справочниках.

При действии повторных нагрузок (при расчете на выносливость) концентрация напряжений учитывается для всех материалов: и для хрупких, и для пластичных.

§ 57. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе, так же как и при других деформациях, работа, производимая внешними силами, затрачивается на изменение потенциальной энергии деформированного стержня.

Подобно тому, как это было сделано для сосредоточенной внешней силы [см. формулу (II.44)], можно показать, что работа внешнего момента M , может быть вычислена по формуле

$$W = M \cdot \vartheta / 2, \quad (\text{VI.20})$$

где ϑ — угол поворота сечения в точке приложения момента.

Элементарная работа изгибающего момента может быть найдена по формуле, аналогичной формуле (II.45):

$$dW_i = -M d\vartheta / 2.$$

Но при изгибе имеем (см. рис. VI.16)

$$d\vartheta = dz / \rho.$$

Для кривизны ранее получено выражение (VI.7)

$$1/\rho = M / (EI_x),$$

поэтому

$$dW_i = -\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI_x} dz.$$

Полная работа изгибающих моментов для балки длиной l

$$W_i = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI_x} dz. \quad (\text{VI.21})$$

Потенциальную энергию изгиба, равную работе внутренних сил, взятую с обратным знаком, можно определить по формуле

$$U = -W_i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dz}{EI_x}. \quad (\text{VI.22})$$

В общем случае изгиба в поперечных сечениях балки кроме изгибающих моментов возникают еще и поперечные силы.

Однако потенциальная энергия сдвига, соответствующая работе поперечной силы, как показывают исследования, невелика и ею обычно пренебрегают.

Поэтому формула (VI.22) пригодна и для чистого, и для общего случая изгиба.

ГЛАВА VII
ИЗГИБ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 58. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Под действием нагрузки балка искривляется. Сечения балки перемещаются перпендикулярно* первоначально прямой оси балки и одновременно поворачиваются (рис. VII.1).

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, называется **прогибом балки** в данной точке (сечении) и обозначается v . Угол φ , на который сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется **углом поворота сечения**. Учитывая, что повернувшееся сечение перпендикулярно изогнутой оси балки, заключаем, что вместо определения угла поворота сечения можно определять равный ему угол между касательной к данной точке изогнутой оси и первоначальной осью балки (рис. VII.1, где прогиб и угол поворота сечения даны для точки A).

Для определения деформаций балки воспользуемся уравнением

$$K = 1/\rho = M/(EI), \quad (\text{VII.1})$$

связывающим кривизну оси балки с изгибающим моментом и жесткостью сечения балки (см. § 52).

Из курса математики известна следующая формула для кривизны линии:

$$K = \pm v''/[1 + (v')^2]^{3/2}, \quad (\text{VII.2})$$

где $v' = dv/dz$; $v'' = d^2 v/dz^2$.

Подставляя это значение K в формулу (VII.1), получаем

$$\pm v''/[1 + (v')^2]^{3/2} = M/(EI). \quad (\text{VII.3})$$

* Строго говоря, центры тяжести поперечных сечений балки перемещаются при ее изгибе наряду с перемещениями, перпендикулярными оси, также и перемещения вдоль оси, но эти вторые перемещения весьма малы по сравнению с первыми и поэтому не учитываются.

Уравнение (VII.3) представляет собой точное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (упругой линии). Интегрирование этого нелинейного уравнения представляет большие трудности. Однако для большинства практических задач величиной $(v')^2 = \operatorname{tg}^2 \vartheta \approx \vartheta^2$ ввиду малости деформаций по сравнению с единицей можно пренебречь.

Фактические значения углов поворота сечений балки порядка тысячных долей радиана. Если даже принять $\vartheta = 0,01$ рад, то и в этом случае величина $\vartheta^2 = (v')^2$ ничтожно мала по сравнению с единицей.

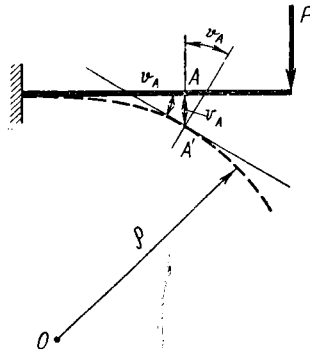


Рис. VII.1

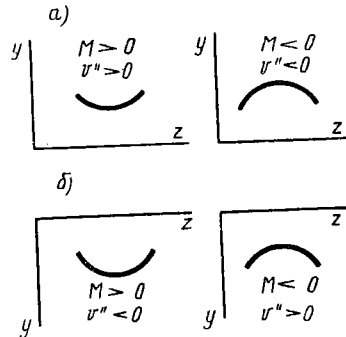


Рис. VII.2

Отбрасывая $(v')^2$ в знаменателе формулы (VII.3), получим приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\pm EIv'' = M, \quad (\text{VII.4})$$

интегрирование которого не представляет затруднений. Выбор знака определяется принятой системой координат. Для системы координат, приведенной на рис. VII.2, а, имеем одинаковые знаки для кривизны $K \approx v''$ и для момента M .

Следовательно, в этой системе координат следует пользоваться уравнением (VII.4) в виде

$$EIv'' = M. \quad (\text{VII.5})$$

Для системы координат, принятой на рис. VII.2, б, имеем разные знаки для v'' и M . Следовательно, в этом случае следует пользоваться уравнением (VII.4) в виде

$$EIv'' = -M. \quad (\text{VII.6})$$

В дальнейшем будем пользоваться системой координат, показанной на рис. VII.2, а, и дифференциальным уравнением изогнутой оси, записанной в виде (VII.5).

Для вычисления углов поворота $\vartheta \approx v'$ и прогибов v необходимо произвести интегрирование уравнения [VII.5], что может быть выполнено тремя способами: аналитическим, графоаналитическим и графическим.

Рассмотрим аналитический способ.

Проинтегрировав уравнение [VII.5] один раз, получим уравнение углов поворота

$$EIv' = \int M dz + C, \quad (\text{VII.7})$$

где C — постоянная интегрирования.

Интегрируя второй раз, получаем уравнение прогибов

$$EIv = \int dz \int M dz + Cz + D, \quad (\text{VII.8})$$

где D — вторая постоянная интегрирования.

Постоянные интегрирования C и D определяются из условий опирания балки (граничных условий). Так, для балки, заделанной одним концом (см. рис. VII.1), в месте заделки должны быть равны нулю и прогиб, и угол поворота сечения. Для балки, опертой по концам, прогиб должен быть равен нулю и на левом, и на правом конце.

Определив постоянные интегрирования, можно из уравнений (VII.7) и (VII.8) определить угол поворота и прогиб любого сечения.

Во многих случаях по эксплуатационным соображениям максимальные прогибы балок ограничиваются определенной величиной — **допускаемым прогибом** v_{adm} *. Допускаемый прогиб зависит от назначения сооружения или машины. Например, для подкрановых балок принимают

$$v_{adm} = (1/600 \div 1/700) l,$$

где l — пролет балки.

В машиностроении норма допускаемого прогиба колеблется в довольно широких пределах; в зависимости от назначения детали принимают

$$v_{adm} = (1/1000 \div 1/300) l.$$

Наибольшие углы наклона опорных сечений валов на роликовых подшипниках не должны превосходить 0,001 рад.

Пример VII.1. Определить v_{max} и ϑ_{max} для консоли нагруженной сосредоточенной силой на конце (рис. VII.3).

* В специальной технической и справочной литературе допускаемая стрела прогиба (максимального прогиба) обычно обозначается f_{adm} .

Решение. Начало координат поместим на левом конце балки. Изгибающий момент в сечении с абсциссой z определяем как момент внешних сил, расположенных между данным сечением и началом координат:

$$M_z = -Fz.$$

Следовательно,

$$EIv'' = -Fz.$$

Интегрируем первый раз

$$EIv' = -Fz^2/2 + C.$$

Интегрируем второй раз

$$EIv = -Fz^3/6 + Cz + D.$$

Для определения C и D имеем следующие условия:

1) при $z=l$ $v=0$; 2) при $z=l$ $\phi=v'=0$.

Из второго условия получаем $C = Fl^2/2$. Из первого условия получаем $0 = Fl^3/6 + Fl^2/2 + D$, откуда $D = -Fl^3/3$. Теперь можно определить v_{\max} и ϕ_{\max} .

Совершенно очевидно, что v_{\max} и ϕ_{\max} имеют место при $z=0$. Полагая в формулах $z=0$, получаем

$$v'_{\max} = \phi_{\max} = Fl^2/(2EI); \quad v_{\max} = -Fl^3/(3EI). \quad (\text{VII.9})$$

Положительное значение угла поворота ϕ указывает, что сечение поворачивается в направлении, противоположном движению часовой стрелки.

Отрицательное значение v показывает, что центр тяжести сечения перемещается вниз, т. е. в сторону отрицательных значений ординат v .

Обратим внимание на то, что

$$C = EI\phi_0 \quad (\text{VII.10})$$

и

$$D = EIv_0, \quad (\text{VII.11})$$

где v_0 — прогиб в начале координат, ϕ_0 — угол поворота в начале координат.

Зависимость (VII.10) и (VII.11) всегда будут справедливы для балок, имеющих один участок нагружения, если вычислять изгибающие моменты от сил, расположенных между сечением и началом координат. Это же остается в силе и для балок с любым числом участков нагружения, если вместо способа неопределенного интегрирования уравнения (VII.5) применить способ определенного интегрирования (см. § 59).

Нагружая образец по рис. VII.3, весьма просто определить модуль упругости материала.

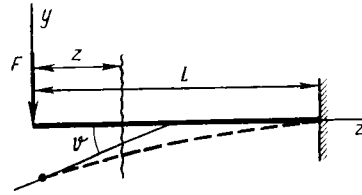


Рис. VII.3

Пусть нагрузке F_1 соответствует прогиб конца образца — v_1 (определенный каким-либо прибором, например индикатором). Тогда из формулы (VII.9) получим значение модуля упругости:

$$E = F_1 l^3 / (3Iv_1).$$

Определение модуля упругости путем испытания образцов на растяжение представляет более сложную процедуру.

§ 59. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ УЧАСТКАХ НАГРУЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ БАЛОК. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если на балку действует сложная нагрузка (рис. VII.4), то в этом случае на разных участках закон изменения изгибающих моментов будет выражаться различными уравнениями. Диффе-

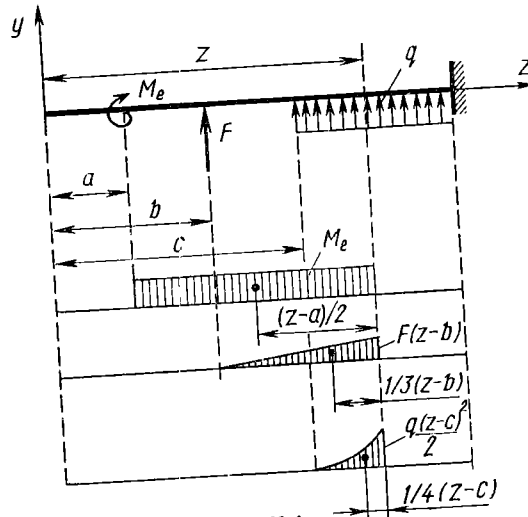


Рис. VII.4

ренциальное уравнение изогнутой оси придется составлять для каждого участка.

Число постоянных интегрирования будет равно удвоенному числу участков. Для определения этих постоянных всегда можно составить достаточное число уравнений, используя условия на опорах балки и условия на концах смежных участков, где прогибы и углы поворота равны между собой. Однако такой способ решения очень сложен.

Более простой способ решения получается, если вместо неопределенного интегрирования уравнения (VII.5) применить способ определенного интегрирования. При этом удастся достигнуть удобной графоаналитической интерпретации решения.

Рассмотрим снова дифференциальное уравнение (VII.5). Проинтегрируем его один раз в пределах от нуля до z , приняв пока $EI = \text{const}$:

$$EI \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^z M dz = \int_{A(0)}^{A(z)} dA, \quad (\text{VII.12})$$

где $dA = Mdz$ — дифференциал площади эпюры M (рис. VII.5).

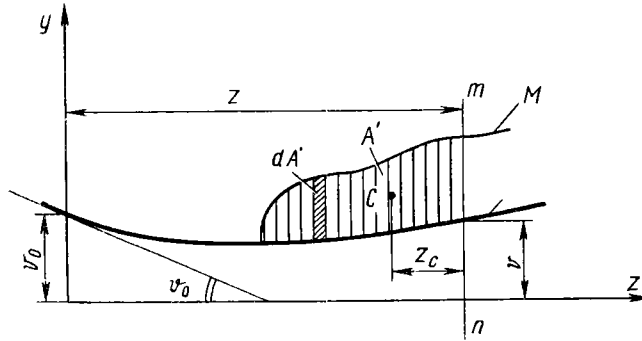


Рис. VII.5

Выполнив интегрирование, получим из (VII.12)

$$EI\theta = EI\theta_0 + A(z) - A(0) = EI\theta_0 + A' - A(0),$$

или

$$\boxed{EI\theta = EI\theta_0 + A'}. \quad (\text{VII.13})$$

Здесь $A(z) = A'$ — отсеченная площадь эпюры M , т. е. площадь эпюры, расположенная между началом координат и текущим сечением, в котором определяются перемещения; $A(0)$ — отсеченная площадь для сечения, проходящего через начало координат, очевидно, равная 0.

Уравнение (VII.13) перепишем в виде

$$EI \frac{d\theta}{dz} = EI\theta_0 + A(z). \quad (\text{VII.14})$$

Проинтегрируем это уравнение от 0 до z :

$$EI \int_{v_0}^v dv = EI\theta_0 \int_0^z dz + \int_0^z A(z) dz = EI\theta_0 \int_0^z dz + \int_{S(0)}^{S(z)} dS. \quad (\text{VII.15})$$

Здесь $dS = A(z) dz$ — дифференциал статического момента отсеченной площади эпюры M .

После интегрирования из (VII.15) получим

$$EIv = EIv_0 + EI\vartheta_0 z + S(z) - S(0) = EIv_0 + EI\vartheta_0 z + S'_{m,n}, \quad (\text{VII.16})$$

где $S(z) \equiv S'_{m,n} = A'z_c$ — статический момент отсеченной площади эпюры M относительно текущего сечения; $S(0)$ — статический момент отсеченной площади эпюры M относительно сечения, проходящего через начало координат. Он равен нулю, так как $A(0) = 0$.

Таким образом, для определения угловых и линейных перемещений при изгибе имеем формулы (VII.13) и (VII.16).

Если балка имеет различную жесткость на разных участках, то вместо формул (VII.13) и (VII.16) аналогично получим:

$$\vartheta' \equiv \vartheta = \vartheta_0 + A'_{red}, \quad (\text{VII.17})$$

$$v = v_0 + \vartheta_0 z + S'_{red}, \quad (\text{VII.18})$$

где A'_{red} — приведенная отсеченная площадь эпюры моментов, т. е. эпюры, ординаты которой поделены на EI ; S'_{red} — статический момент отсеченной площади эпюры моментов приведенной отсеченной площади эпюры моментов.

В табл. VII.1 приведены наиболее часто встречающиеся эпюры изгибающих моментов с указанием их площадей и положения центра тяжести (z_c).

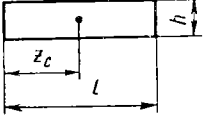
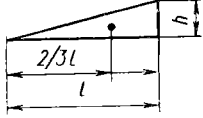
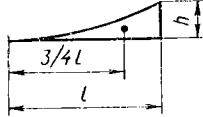
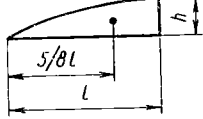
Правило знаков при пользовании формулами (VII.13) и (VII.16), а также формулами (VII.17) и (VII.18) следующее: площадь A' принимается положительной, если эпюра M положительна; площадь A' принимается отрицательной, если эпюра M отрицательна. Статический момент $S'_{m,n}$ принимается положительным, если A' положительна; статический момент $S'_{m,n}$ считается отрицательным, если A' отрицательна.

Если жесткость балки постоянна, то формулы (VII.13) и (VII.16) можно представить в аналитической форме. Сделаем это для трех типов внешних сил, представленных на рис. VII.4. Строим эпюры изгибающих моментов от каждой нагрузки отдельно.

По формулам (VII.13) и (VII.16) получим непосредственно следующие формулы, вычисляя площади и статические моменты (относительно текущего сечения) отсеченных площадей эпюр:

$$EI\vartheta = EI\vartheta_0 + M'_e(z-a) + F(z-b)^2/2 + q(z-c)^3/6; \quad (\text{VII.19})$$

Таблица VII.1

Вид эпюры	Площадь эпюры	Расстояние до центра тяжести z_c
	hl	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{2}{3}l$
Квадрат параболы 	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{3}{4}l$
Квадрат параболы 	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$

$$EIv = EIv_0 + EI\theta_0 z + M_c (z-a)^2/2 + F(z-b)^3/6 + q(z-c)^4/24. \quad (\text{VII.20})$$

При одновременном действии нескольких внешних сил уравнения для определения углов поворота и прогибов (на основании принципа независимости действия сил) имеют следующий вид:

$$EIv' = EI\theta = EI\theta_0 + \sum M_c (z-a) + \sum \frac{F(z-b)^2}{2} + \sum \frac{q(z-c)^3}{6}; \quad (\text{VII.21})$$

$$EIv = EIv_0 + EI\theta_0 z + \sum \frac{M_c (z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24}. \quad (\text{VII.22})$$

Эти уравнения называют **универсальными уравнениями изогнутой оси балки**. В них включены со своими знаками все внешние силы (включая опорные реакции), расположенные между началом координат и сечением с абсциссой z , в котором определяются перемещения. Внешние силы, показанные на рис. VII.4, включают в универсальные уравнения со знаком плюс, противоположно направленные внешние силы — со знаком минус.

Важно заметить, что последний член этих уравнений справедлив только в том случае, если распределенная нагрузка не обрывается ранее того сечения, где определяется v или ϕ . Если же нагрузка обрывается, то следует продолжить ее до данного сечения, одновременно добавив нагрузку, равную по абсолютному значению, но обратного направления (рис. VII.6).

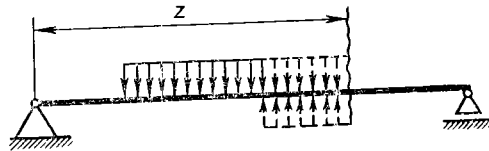


Рис. VII.6

Недостаток универсальных уравнений состоит в том, что их нельзя непосредственно использовать для определения перемещений в балках, имеющих различную жесткость EI на разных участках.

В этих случаях следует применять общий метод определения перемещений — метод Мора (см. дальше) или пользоваться формулами (VII.17) и (VII.18).

§ 60. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ И ПО УНИВЕРСАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Пример VII.2. Определить прогиб свободного конца консольной балки с сосредоточенной нагрузкой на конце (рис. VII.7, а).

Решение. Помещаем начало координат в заделке, тогда $\phi_0 = 0$ и $\tau_0 = 0$. Строим эпюру изгибающих моментов. Центр тяжести эпюры на расстоянии $2l/3$ от правого конца. По формуле (VII.13) определяем $EI\phi_B$ как площадь эпюры M между началом координат и сечением B :

$$EI\phi_B = A' = -Fl \cdot l/2 = -Fl^2/2.$$

Знак минус берем потому, что эпюра M отрицательна, откуда $\phi_B = -Fl^2/(2EI)$, (по часовой стрелке).

По формуле (VII.16) прогиб определяем как статический момент всей площади эпюры относительно сечения B :

$$EIV_B = S'_B = -1/2 Fl \cdot l \cdot 2/3 l = -Fl^3/3,$$

откуда $v_B = -Fl^3/(3EI)$ (в направлении отрицательной оси y , т. е. вниз). Знак минус при вычислении S'_B взят потому, что эпюра M отрицательна.

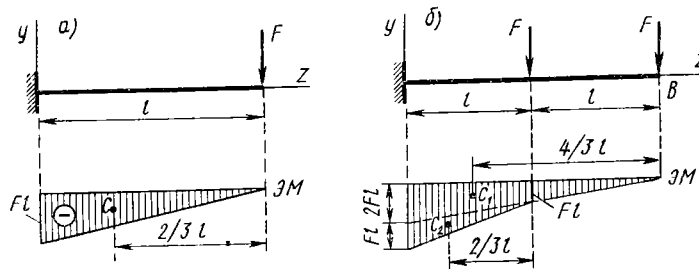


Рис. VII.7

Пример VII.3. Определить прогиб свободного конца консольной балки, показанной на рис. VII.7, б.

Решение. Помещаем начало координат в заделке, тогда $v_0 = 0$ и $\phi_0 = 0$. Эпюру изгибающих моментов «раскладываем», т. е. представляем ее как сумму эпюр от действия каждой силы (два треугольника). По формуле (VII.13) определим угол поворота:

$$EI\phi_B = A' = -0,5 \cdot 2Fl \cdot 2l - 0,5Fl \cdot l = -2,5Fl^2 \text{ (по часовой стрелке).}$$

По формуле (VII.16) определим прогиб:

$$EIV_B = S'_B = -0,5 \cdot 2Fl \cdot 2l \cdot 4l/3 - 0,5Fl \cdot l \cdot 5l/3 = -3,5Fl^3 \text{ (вниз).}$$

Площадь и статический момент эпюры моментов взяты со знаком минус, так как эпюра M отрицательна.

Пример VII.4. Определить прогиб под нагрузкой для балки, показанной на рис. VII.8.

Решение. Помещаем начало координат на левом конце, тогда $v_0 = 0$. Строим эпюру M .

Для определения ϕ_0 используем условие $\phi_{z=l/2} = 0$ (ввиду симметрии изогнутой оси балки). По формуле (VII.13) имеем

$$\begin{aligned} EI\phi_{z=l/2} &= EI\phi_0 + A' = \\ &= EI\phi_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2} = 0, \end{aligned}$$

откуда $EI\phi = -Fl^2/16$ (по часовой стрелке).

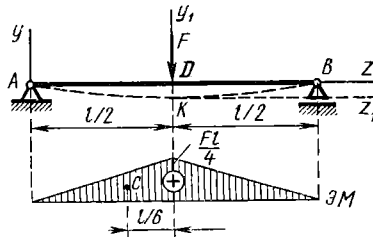


Рис. VII.8

Площадь A' взята со знаком плюс, потому что эпюра M положительна.

По формуле (VII.16) найдем

$$\begin{aligned}
 E I v_B &= -\frac{F l^2}{16} \cdot \frac{l}{2} + S'_D = \\
 &= -\frac{F l^3}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{F l}{4} \cdot \frac{l}{6} = -\frac{F l^3}{48} \quad (\text{вниз}). \quad (\text{VII.23})
 \end{aligned}$$

Знак плюс при вычислении S'_D взят потому, что эпюра M положительна.

Этот пример можно решить проще, если поместить начало координат в точке K . Тогда $v_0 = \phi_0 = 0$. Перемещение точки B относительно точки K найдем по формуле (VII.16):

$$E I v_B = S'_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{F l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F l^3}{48} \quad (\text{вверх}).$$

Следовательно, $v_D = -v_B = -F l^3 / (48 E I)$ (вниз).

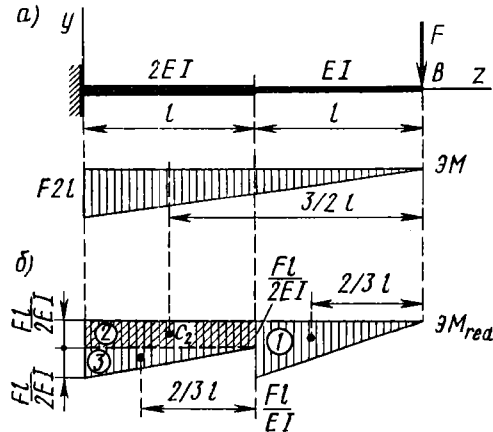


Рис. VII.9

Пример VII.5. Определить прогиб свободного конца балки, показанной на рис. VII.9, а.

Решение. Помещаем начало координат в заделке, тогда $v_0 = 0$ и $\phi_0 = 0$. Строим эпюру M и приведенную эпюру M_{red} , в которой ординаты M поделены на жесткость балки (рис. VII.9, б).

По формуле (VII.17) имеем

$$\phi = \sum A'_{red} = -\frac{l}{2} \left(\frac{F l}{E I} + \frac{F l}{2 E I} \right) - \frac{1}{2} l \frac{F l}{E I} = -\frac{5}{4} \frac{F l^2}{E I}$$

(по часовой стрелке).

Разбивая эпюру на три простейших фигуры 1, 2, 3, получим по формуле (VII.18)

$$v_B = \sum S'_{red} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{EI} l \cdot \frac{2}{3} l - \frac{Fl}{2EI} l \cdot \frac{3}{2} l - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2EI} l \cdot \frac{5}{3} l = -1,5Fl^3/EI \text{ (вниз).}$$

Пример VII.6. Определить прогиб среднего сечения балки, показанной на рис. VII.10, а.

Решение. Помещаем начало координат на левом конце балки,

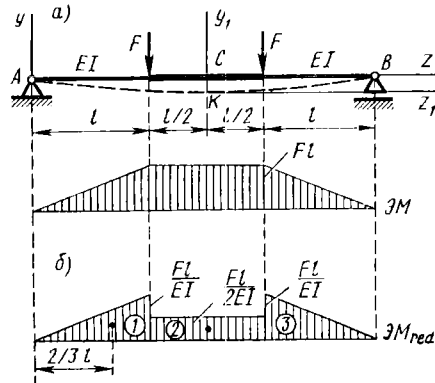


Рис. VII.10

тогда $v_0 = 0$. Строим эпюру M и приведенную эпюру M_{red} , в которой ординаты M поделены на жесткость балки (рис. VII.10, б).

Для определения ϕ_0 используем условие $v_{z=1,5l} = 0$ (ввиду симметрии задачи).

По формуле (VII.17) имеем $v_C = \phi_0 + A_{red}$ или

$$\phi_0 + \frac{l}{2} \frac{Fl}{EI} + \frac{Fl}{2EI} \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

откуда $\phi_0 = -\frac{3}{4} \frac{Fl^2}{EI}$ (по часовой стрелке). Определяем прогиб при $z = 1,5l$ по формуле (VII.18):

$$v_C = \phi_0 z + \sum S'_{red} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{Fl^2}{EI} \cdot \frac{3}{2} l + \frac{l}{2} \frac{Fl}{EI} \cdot \frac{5}{6} l + \\ + \frac{Fl}{2EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = -\frac{31}{48} \frac{Fl^3}{EI} \text{ (вниз).}$$

Этот пример можно решить проще, если, используя симметрию, поместить начало координат в точке K . Тогда перемещение точки B относительно точки K по формуле (VII.18) будет равно (при $v_0 = \phi_0 = 0$)

$$v_B = S'_{red} = \frac{l}{2} \frac{Fl}{EI} \frac{2}{3} l + \frac{l}{2} \frac{Fl}{2EI} \frac{5}{4} l = \frac{31Fl^3}{48EI} \text{ (вверх).}$$

Следовательно, $v_K = -v_B = -31Fl^3/(48EI)$ (вниз).

Пример VII.7. Определить по универсальным уравнениям максимальные прогиб и угол поворота для консоли при действии равномерно распределенной нагрузки (рис. VII.11).

Решение. Начало координат выгоднее поместить на левом конце балки, так как при этом $v_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 0$.

Следовательно, по универсальным уравнениям (VII.21) и (VII.22) сразу можно вычислить v_{max} и ϑ_{max} , которые, как видно из чертежа, будут иметь место в сечении, где $z=l$.

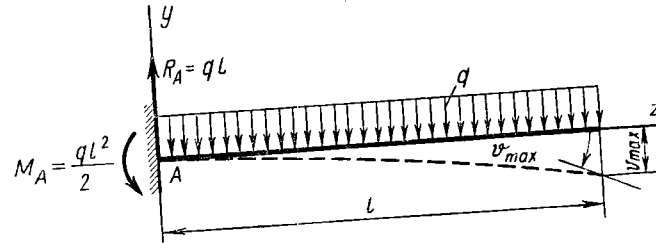


Рис. VII.11

Чтобы пользоваться универсальными уравнениями, необходимо, как уже было сказано, брать силы и моменты, находящиеся между данным сечением и началом координат. Для этого предварительно определим реактивный момент и реактивную силу в заделке.

Реактивная сила $R_A = ql$ и направлена вверх. В универсальные уравнения она войдет со знаком плюс. Реактивный момент $M_A = ql^2/2$ направлен против часовой стрелки. Его следует учитывать со знаком минус.

Расстояние от начала координат до момента, опорной реакции и до начала равномерно распределенной нагрузки равны нулю, т. е. $a=b=c=0$.

Определяем v при $z=l$, т. е. v_{max} :

$$EIv_{max} = -\frac{ql^2}{2} \frac{(l-0)^2}{2} + \frac{ql(l-0)^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} = -\frac{ql^4}{48}$$

Следовательно,

$$v_{max} = ql^4/(8EI) \text{ (вниз).} \quad (VII.24)$$

Из универсального уравнения для углов поворота получим

$$EIv'_{max} = -\frac{ql^2}{2} (l-0) + \frac{ql(l-0)^2}{2} - \frac{q(l-0)^3}{6} = -\frac{ql^3}{6}$$

Следовательно,

$$v'_{max} = \vartheta_{max} = -ql^3/(6EI) \text{ (по часовой стрелке).} \quad (VII.25)$$

Пример VII.8. Определить v_{\max} и v'_{\max} для консольной балки при действии пары M_e на свободном конце (рис. VII.12).

Решение. Начало координат помещаем на левом конце балки. Тогда $v_0=0$ и $\phi_0=0$. Опорные реакции равны $R_A=0$, а $M_A=M$ и направлен против часовой стрелки.

Значения v_{\max} и v'_{\max} будут на правом конце балки при $z=l$.

Применяя универсальные уравнения, получим:

$$EIV_{\max} = -M_e (l-0)^2/2 = -M_e l^2/2, \quad v_{\max} = -Ml^2/(2EI) \quad (\text{вниз}); \quad (\text{VII.26})$$

$$EIv'_{\max} = -M_e (l-0) = -M_e l; \quad v'_{\max} = -M_e l/(EI)$$

(по часовой стрелке). (VII.27)

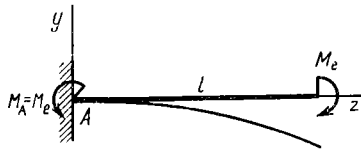


Рис. VII.12

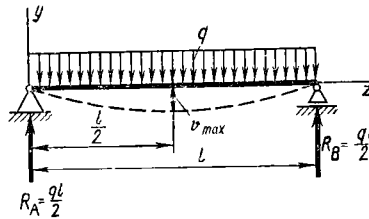


Рис. VII.13

Пример VII.9. Определить v_{\max} и ϕ_{\max} для балки, показанной на рис. VII.13.

Решение. В силу симметрии реакции равны

$$R_A = R_B = ql/2.$$

Помещаем начало координат на левой опоре. Тогда $v_0=0$.

Для определения ϕ_0 используем условие, что при $z=l$ $v=0$. Получим

$$EIv_{z=l} = EI\phi_0 l + \frac{ql}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{q}{24} \frac{(l-0)^4}{24} = 0,$$

откуда $\phi_0 = -ql^3/(24EI) = \phi_A$. Очевидно, $\phi_A = -\phi_B$.

Заметим, что наибольшие углы поворота имеют опорные сечения. Максимальный прогиб находится посередине пролета балки:

$$EIv_{z=l/2} = -\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}-0\right)^3}{6} - \frac{q}{24} \frac{\left(\frac{l}{2}-0\right)^4}{24} = -\frac{5ql^4}{384}.$$

Следовательно,

$$v_{\max} = -5ql^4/(384EI) \quad (\text{вниз}). \quad (\text{VII.28})$$

Пример VII.10. Определить максимальный прогиб и угол поворота на опорах для балки, нагруженной посередине пролета сосредоточенной силой (рис. VII.14).

Решение. Реакции равны $F/2$ каждая и направлены снизу вверх. Помещаем начало координат на левом конце, тогда $v_0=0$. Для определения ϑ_0 используем условие, что при $z=l$ прогиб равен нулю ($v=0$)*:

$$Elv_{z=l} = El\vartheta_0 l + \frac{F}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{F(l-l/2)^3}{6} = 0,$$

откуда $El\vartheta_0 = -Fl^2/16$. Следовательно, $\vartheta = \vartheta_A = \vartheta_{\max} = -Fl^2/(16EI)$.

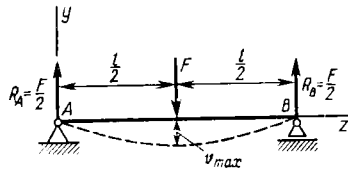


Рис. VII.14

Ввиду симметрии угол поворота на правой опоре $\vartheta_B = -\vartheta_A = Fl^2/(16EI)$.

Максимальный прогиб $v_{\max} = v_{z=l/2}$, следовательно,

$$Elv_{\max} = -\frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{F}{2} \cdot \frac{(l/2)^3}{6} = -\frac{Fl^3}{48}.$$

Окончательно

$$v_{\max} = -Fl^3/(48EI) \text{ (вниз)}. \quad (\text{VII.29})$$

Пример VII.11. Определить прогибы в точках D и C и угол поворота в точке B балки, изображенной на рис. VII.15. Момент инерции сечения балки $I = 13\,380 \text{ см}^4 = 13\,380 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ (двутавр № 36); $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение. Определяем опорные реакции:

$$1. \sum M_B = 0; R_A \cdot 4 + 40 \cdot 3 - 80 - 40 \cdot 1 - 40 \cdot 2 = 0; R_A = 20 \text{ кН.}$$

$$2. \sum Y = 0; -20 - 40 + R_B - 40 - 40 = 0; R_B = 140 \text{ кН.}$$

Помещаем начало координат на левой опоре. Тогда $v_0=0$. Угол ϑ_0 определяем из условия, что при $z=4 \text{ м}$ $v=0$.

По универсальному уравнению для прогибов при $z=4 \text{ м}$ имеем

$$Elv_{z=4} = El\vartheta_0 \cdot 4 + \frac{80(4-2)^2}{2} - \frac{20(4-0)^3}{6} - \frac{20(4-0)^4}{24} + \frac{20(4-2)^4}{24} = 0.$$

Так как распределенная нагрузка обрывается в точке D, то согласно сказанному ранее продолжаем ее до конца, но вводим компенсирующую нагрузку обратного направления на участке DB. Последний член как раз

* В данном случае можно было определить ϑ_0 также из условия, что посередине пролета касательная к упругой линии горизонтальна, т. е. $v'_{z=l/2} = 0$.

и учитывает распределенную нагрузку, действующую снизу вверх (на чертеже указанные преобразования нагрузки не отражены).

Произведя вычисления, получаем $\theta_0 = \theta_A = 63,3/(EI)$. Определяем прогибы:

в точке C ($z=6$ м)

$$EIv_C = 63,3 \cdot 6 + \frac{80(6-2)^2}{2} - \frac{20(6-0)^3}{6} + \frac{140(6-4)^3}{6} - \frac{20(6-4)^4}{24} + \frac{20(6-2)^4}{24} - \frac{20(6-4)^4}{24} = -393 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = -0,393 \text{ МН} \cdot \text{м}^3;$$

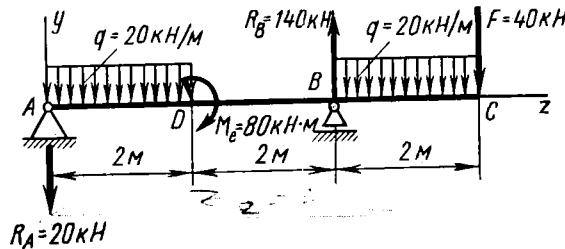


Рис. VII.15

в точке D

$$EIv_D = 63,3 \cdot 2 - \frac{20(2-0)^3}{6} - \frac{20(2-0)^4}{24} = 86,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = 0,0867 \text{ МН} \cdot \text{м}^3.$$

Окончательно получаем

$$v_C = \frac{-0,393}{EI} = \frac{-0,393}{2 \cdot 10^5 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,0148 \text{ м} = -1,48 \text{ см};$$

$$v_D = \frac{0,0867}{EI} = \frac{0,0867}{2 \cdot 10^5 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,00324 \text{ м} = 0,324 \text{ см}.$$

Определяем угол поворота в точке B . По универсальному уравнению для углов поворота при $z=4$ м имеем

$$EIv'_B = EI\theta_B = 63,3 + 80(4-2) - \frac{20 \cdot 4^2}{2} - \frac{20 \cdot 4^3}{6} + \frac{20(4-2)^3}{6} = -123 \text{ кНм}^2,$$

$$\text{откуда } \theta_B = \frac{-0,123}{EI} = \frac{-0,123}{2 \cdot 10^5 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -46 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

**§ 61. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ.
ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Докажем теорему, имеющую важные приложения, а именно теорему о взаимности работ, или **теорему Бетти** (по имени итальянского ученого, который первым ее опубликовал). Для этого рассмотрим какую-нибудь линейно-деформируемую систему в двух различных состояниях, отвечающих двум различным нагрузкам (рис. VII.16). Для простоты выкладки рассмотрим простую балку, нагруженную в обоих состояниях самой простой нагрузкой (по одной сосредоточенной силе). Нагрузка, внутренние усилия

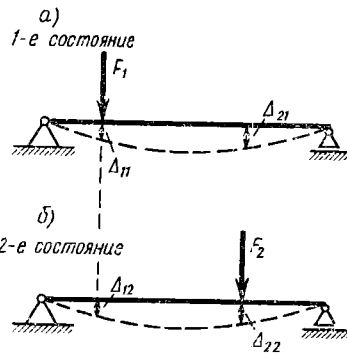


Рис. VII.16

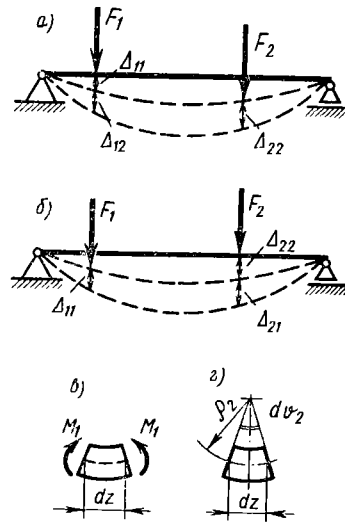


Рис. VII.17

и деформации, соответствующие этим состояниям, отмечены индексами 1 и 2.

На рис. VII.16, а изображено первое состояние системы, а на рис. VII.16, б — второе.

Перемещение по направлению нагрузки в первом состоянии от этой же нагрузки обозначено Δ_{11} . Перемещение по направлению нагрузки второго состояния, вызванное действием нагрузки первого состояния, обозначено Δ_{21} .

Обозначения перемещений второго состояния приведены на рис. VII.16, б. Перемещения, содержащие в своем обозначении два одинаковых индекса, как, например, Δ_{11} , Δ_{22} , называются **главными**, а перемещения вида Δ_{12} , Δ_{21} и т. д. — **побочными**. Докажем теперь теорему о взаимности работ, а именно:

работа внешних сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на перемещениях, вызванных силами первого состояния.

Для доказательства теоремы нагрузим балку силами F_1 и F_2 , прикладывая их в разной последовательности.

1. Вначале приложим нагрузку F_1 , а затем к деформированной балке приложим силу F_2 (рис. VII.17, а).

Подсчитаем работу, произведенную при этом внешними силами.

Работа, произведенная силой F_1 на собственном перемещении Δ_{11} , вызванном этой силой, $W_{11} = F_1 \Delta_{11} / 2$ [см. формулу (II.44)]. Работа, произведенная силой F_2 на собственном перемещении Δ_{22} , $W_{22} = F_2 \Delta_{22} / 2$.

Дополнительная работа силы F_1 на перемещении Δ_{12} , вызванном силой F_2 , $W_{12} = F_1 \Delta_{12}$.

Обращаем внимание на то, что при вычислении W_{12} множитель $1/2$ отсутствует, так как сила F_1 на перемещении Δ_{12} совершает работу, оставаясь постоянной.

Полная работа, совершенная внешними силами при первом способе (последовательности) нагружения,

$$W_T = W_{11} + W_{22} + W_{12}.$$

Работа W_{12} , фактически совершаемая силой на перемещениях, вызванных другой силой (силами), называется **дополнительной работой**. Однако эта работа может и не совершаться, а может рассматриваться лишь как возможная, т. е. такая, которая будет произведена, если нагрузить систему сразу обеими нагрузками. Такую работу называют **виртуальной (возможной) работой**.

При дальнейших выкладках не будем делать различия между дополнительной и виртуальной работой.

2. Нагрузим теперь балку в другой последовательности: вначале приложим силу F_2 , а затем силу F_1 (рис. VII.17, б). Работа, произведенная силой F_2 , на собственном перемещении Δ_{22} ,

$$W_{22} = F_2 \Delta_{22} / 2.$$

Работа, произведенная силой F_1 на собственном перемещении Δ_{11} ,

$$W_{11} = F_1 \Delta_{11} / 2.$$

Работа, произведенная силой F_2 на перемещении Δ_{21} ,

$$W_{21} = F_2 \Delta_{21}.$$

Полная работа при втором способе нагружения

$$W_{11} = W_{22} + W_{11} + W_{21}.$$

Однако работа сил не зависит от порядка их приложения. Следовательно, $W_1 = W_{11}$, откуда получим

$$W_{12} = W_{21}, \quad (\text{VII.30})$$

или для рассматриваемого случая

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}. \quad (\text{VII.31})$$

Этим доказана сформулированная выше теорема о взаимности виртуальных работ внешних сил. Мы доказали ее на примере сосредоточенных внешних нагрузок. Однако теорема остается справедливой и для любой внешней нагрузки: сосредоточенной, распределенной, внешних моментов. Следует только иметь в виду, что работа моментов вычисляется уже не на линейных, а на угловых перемещениях.

Аналогичным образом может быть доказана также взаимность виртуальной работы внутренних сил:

$$W_{12}^i = W_{21}^i. \quad (\text{VII.32})$$

Виртуальная работа, например W_{12}^i , для элемента балки длиной dz по абсолютному значению равна (рис. VII.17, *в*, *г*)

$$dW_{12}^i = M_1 d\theta_2. \quad (\text{VII.33})$$

Из чертежа видно, что

$$d\theta_2 = dz/\rho_2.$$

Но $1/\rho_2 = M_2/(EI)$ [см. формулу (VII.1)]. Следовательно, $d\theta_2 = M_2 dz/(EI)$, а поэтому

$$dW_{12}^i = M_1 M_2 dz/(EI).$$

Виртуальная работа W_{12}^i для всей балки длиной l

$$W_{12}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dz, \quad (\text{VII.34})$$

где M_1 и M_2 — текущие значения изгибающих моментов в первом и втором состояниях.

Обращаем внимание на то, что в этой формуле, так же как и при вычислении виртуальной работы внешних сил, нет множителя $1/2$.

Аналогичным путем можно показать, что работа внутренних сил второго состояния на перемещениях, вызванных внутренними силами первого состояния, может быть вычислена по формуле

$$W_{21}^i = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dz. \quad (\text{VII.35})$$

Сравнивая выражения (VII.34) и (VII.35), видим, что действительно $W_{12}^i = W_{21}^i$, ввиду того что

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dz = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dz.$$

Этим доказана взаимность виртуальной работы внутренних сил.

Используя закон сохранения энергии, можно показать, что дополнительная работа внешних сил равна по абсолютному значению дополнительной работе внутренних сил: $W_{12} = W_{12}^i$.

Действительно, при нагружении системы силой F_1 внешние силы совершают работу $W_{11} = F_1 \Delta_{11}/2$, а внутренние силы совершают работу (см. § 57)

$$W_{11}^i = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_1^2 dz}{EI}.$$

В силу закона сохранения энергии имеем

$$\frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_1^2 dz}{EI}.$$

При последующем нагружении системы силой F_2 аналогично имеет место равенство

$$\frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_2^2 dz}{EI}.$$

Кроме того, при нагружении системы силой F_2 совершается дополнительная работа силой F_1

$$W_{12} = F_1 \Delta_{12}$$

и внутренними силами

$$W_{12}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dz.$$

На основании закона сохранения энергии работа W_{12} должна быть равна работе W_{12}^i :

$$W_{12} = W_{12}^i; \quad (\text{VII.36})$$

аналогично, $W_{21} = W_{21}^i$.

Из сказанного выше следует также, что

$$W_{12} = W_{21} = W_{12}^i = W_{21}^i. \quad (\text{VII.37})$$

Эти соотношения будут использованы далее для обоснования общего метода определения перемещений (метода Мора).

Из теоремы о взаимности работ как частный случай следует другая важная теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла).

Принимая $F_1 = F_2 = 1$, получим из теоремы Бетти по формуле (VII.31)

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (\text{VII.38})$$

Здесь перемещения, вызываемые силами, равными единице (единичными силами), обозначают δ_{11} , δ_{12} и т. д. взамен Δ_{11} , Δ_{12} и т. д., принятых для перемещений от любых сил.

Перемещение точки приложения единичной силы по ее направлению, вызванное второй единичной силой, равно перемещению точки приложения второй единичной силы по направлению последней, вызванному действием первой единичной силы.

§ 62. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МОРА. ПРАВИЛО ВЕРЕЩАГИНА

Рассмотрим теперь общий метод определения перемещений, пригодный для любой линейно-деформируемой системы при любой нагрузке. Этот метод предложен выдающимся немецким ученым О. Мором.

Пусть, например, требуется определить вертикальное перемещение точки B балки, представленной на рис. VII.18, а. Данное (грузовое) состояние обозначим f . Выберем вспомогательное состояние той же балки с единичной (безразмерной) силой, действующей в точке B и в направлении искомого перемещения. Вспомогательное состояние обозначим k (рис. VII.18, б).

Вычислим работу внешних и внутренних сил вспомогательного состояния на перемещениях, вызванных действием сил грузового состояния.

Работа внешних сил равна произведению единичной силы на искомое перемещение v_B :

$$W_{kf} = 1 \cdot v_B.$$

а работа внутренних сил равна интегралу:

$$W_{kj}^i = W_{jk}^i = \int_0^l \frac{M_k M_j dz}{EI}$$

Но в силу равенства [VII.37] имеет $W_{kj} = W_{jk}^i$ или

$$v_B = \int_0^l \frac{M_k M_f dz}{EI} \quad (\text{VII.39})$$

Эта формула и есть **формула Мора (интеграл Мора)**, которая дает возможность определить перемещение в любой точке линейно-деформируемой системы.

В этой формуле подынтегральное произведение $M_k M_f$ положительно, если оба изгибающих момента имеют одинаковый знак, и отрицательно, если M_k и M_f имеют разные знаки.

Если бы мы определяли угловое перемещение в точке B , то в состоянии k следовало бы приложить в точке B момент, равный единице (без размерности).

Обозначая Δ любое перемещение (линейное или угловое), формулу (интеграл) Мора напишем в виде

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_k M_f dz}{EI} \quad (\text{VII.40})$$

В общем случае аналитическое выражение M_k и M_f может быть различным на разных участках балки или вообще упругой системы. Поэтому вместо формулы (VII.40) следует пользоваться более общей формулой

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_k M_f dz}{EI} \quad (\text{VII.41})$$

Если стержни систем работают на изгиб и растяжение, то вместо формулы (VII.41) следует пользоваться формулой

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_k M_f dz}{EI} + \sum \int_0^l \frac{N_k N_f dz}{EA} \quad (\text{VII.42})$$

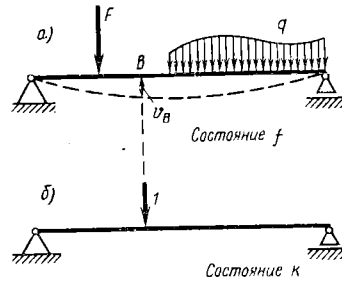


Рис. VII.18

В частном случае, когда стержни работают только на растяжение или сжатие (фермы), формула для определения перемещений имеет вид

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_k N_f dz}{EA}. \quad (\text{VII.43})$$

В этой формуле произведение $N_k N_f$ положительно, если оба усилия растягивающие или оба сжимающие.

При расчете рам, когда стержни работают одновременно и на изгиб, и на растяжение (сжатие), в обычных случаях, как показывают сравнительные расчеты, перемещения можно определять, учитывая лишь изгибающие моменты, так как влияние продольных сил весьма мало.

По тем же соображениям, как отмечалось ранее (см. § 57), в обычных случаях можно не учитывать влияния поперечных сил.

Если состояния f и k одинаковы, то вместо формул (VII.41), (VII.42) и (VII.43) получим:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M^2 dz}{EI}; \quad (\text{VII.44})$$

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M^2 dz}{EI} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dz}{EA}; \quad (\text{VII.45})$$

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N^2 dz}{EA}. \quad (\text{VII.46})$$

Вместо непосредственного вычисления интеграла Мора (VII.40) можно пользоваться графоаналитическим приемом «способом перемножения эпюр», или **правилом Верещагина**.

Рассмотрим две эпюры изгибающих моментов, из которых одна, M_f , имеет произвольное очертание, а другая, M_k , прямолинейная (рис. VII.19, а, б).

Сечение стержня на участке BD будем считать постоянным. В этом случае

$$\int_0^l \frac{M_k M_f dz}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_k M_f dz.$$

Величина $M_f dz$ представляет собой элементарную площадь

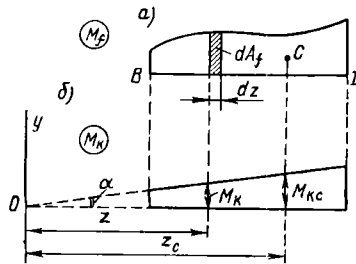


Рис. VII.19

dA_j эпюры M_j (заштрихована на рисунке). Таким образом

$$\int_B^D M_k M_j dz = \int_B^D M_k dA_j.$$

Но $M_k = z \operatorname{tg} \alpha$, следовательно,

$$\int_B^D M_k dA_j = \operatorname{tg} \alpha \int_B^D z dA_j.$$

Но $\int_B^D z dA_j$ представляет собой статический момент площади эпюры M_j относительно некоторой оси y , проходящей через точку O , равный $A_j z_c$, где A_j — площадь эпюры моментов; z_c — расстояние от оси y до центра тяжести эпюры M_j .

Из чертежа видно, что $z_c = M_{kc} / \operatorname{tg} \alpha$, где M_{kc} — ордината эпюры M_k , расположенная под центром тяжести эпюры M_j (под точкой C). Следовательно,

$$\int M_k dA_j = \operatorname{tg} \alpha \int z dA_j = \operatorname{tg} \alpha A_j z_c = A_j M_{kc}, \quad (\text{VII.47})$$

т. е. **искомый интеграл равен произведению площади эпюры M_j (любой по очертанию) на расположенную под ее центром тяжести ординату прямолинейной эпюры M_{kc} .**

Окончательно имеем следующую формулу Верещагина для определения перемещений:

$$\Delta_{kj} = A_j M_{kc} / (EI). \quad (\text{VII.48})$$

Величина $A_j M_{kc}$ считается положительной, если обе эпюры располагаются по одну сторону стержня, и отрицательной, если они располагаются по разные стороны. Положительный результат перемножения эпюр означает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной силы (или момента).

Необходимо помнить, что ордината M_{kc} берется обязательно в прямолинейной эпюре. В том частном случае, если обе эпюры прямолинейные, можно умножить площадь любой из них на соответствующую ординату другой.

Для стержней переменного сечения правило Верещагина перемножения эпюр неприменимо, так как в этом случае уже нельзя выносить величину EI из-под знака интеграла. Здесь следует выразить EI как функцию абсциссы сечения и затем уже вычислять интеграл Мора (VII.39).

При ступенчатом изменении жесткости стержня интегрирование (или перемножение эпюр) производят для каждого

участка отдельно (со своим значением EI) и затем суммируют результаты.

Определять перемещения по способу Верещагина можно не только в стержнях с прямой осью, но и в стержнях, имеющих ломаную ось.

Для ускорения вычислений можно использовать готовые таблицы перемножения эпюр (табл. VII.2).

В этой таблице в клетках на пересечении соответствующих элементарных эпюр приведены результаты перемножения этих эпюр.

При разбивке сложной эпюры на элементарные, представленные в табл. VII.1 и VII.2, следует иметь в виду, что параболические эпюры получены от действия только одной распределенной нагрузки.

В тех случаях, когда в сложной эпюре криволинейные участки получаются от одновременного действия сосредоточенных моментов, сил и равномерно распределенной нагрузки, во избежание ошибки следует сложную эпюру предварительно «расслоить», т. е. разбить ее на ряд самостоятельных эпюр: от действия сосредоточенных моментов, сил и от действия равномерно распределенной нагрузки (см. примеры).

Можно также применить другой пример, не требующий расслоения эпюр, а требующий лишь выделения криволинейной части эпюры по хорде, соединяющей крайние ее точки.

Покажем оба способа на конкретном примере. Пусть, например, требуется определить вертикальное перемещение левого конца балки (рис. VII.20).

Суммарная эпюра от нагрузки представлена на рис. VII.20, а.

Эпюра от действия единичной силы в точке D представлена на рис. VII.20, г.

Для определения вертикального перемещения в точке D необходимо перемножить эпюру от нагрузки на эпюру от единичной силы.

Однако замечаем, что на участке BC суммарной эпюры криволинейная эпюра получена не только от действия равномерно распределенной нагрузки, но также и от действия сосредоточенной силы F . В результате на участке BC уже будет не элементарная параболическая эпю-

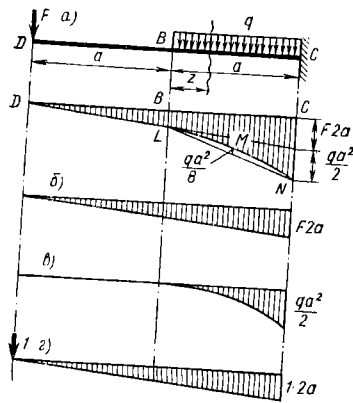


Рис. VII.20

ра, приведенная в табл. VII.1 и VII.2, а, по существу, сложная эпюра, для которой данные этих таблиц недействительны.

Поэтому необходимо произвести расслоение сложной эпюры по рис. VII.20, а на элементарные эпюры, представленные на рис. VII.20, б, в.

Эпюра на рис. VII.20, б получена только от сосредоточенной силы, эпюра по рис. VII.20, в — только от действия равномерно распределенной нагрузки.

Теперь можно перемножить эпюры, используя табл. VII.1 или VII.2.

Для этого необходимо перемножить треугольную эпюру по рис. VII.20, б на треугольную эпюру по рис. VII.20, г и добавить к этому результат перемножения параболической эпюры на рис. VII.20, в на трапециевидную эпюру участка *BC* по рис. VII.20, г, так как на участке *DB* ординаты эпюры по рис. VII.20, в равны нулю.

Покажем теперь второй способ перемножения эпюр.

Рассмотрим снова эпюру по рис. VII.20, а. Примем начало отсчета в сечении *B*. Покажем, что в пределах кривой *LMN* изгибающие моменты могут быть получены как алгебраическая сумма изгибающих моментов, соответствующих прямой *LN*, и изгибающих моментов параболической эпюры *LNML*, такой же, как и для простой балки длиной *a*, загруженной равномерно распределенной нагрузкой *q* (см. пример VI.6):

$$M_0 = qaz/2 - qz^2/2.$$

Наибольшая ордината посередине равна $qa^2/8$. Для доказательства напомним фактическое выражение изгибающего момента в сечении на расстоянии *z* от точки *B*:

$$M_z = -F(a+z) - qz^2/2 = -Fa - Fz - qz^2/2. \quad (1)$$

Напишем теперь выражение изгибающего момента в том же сечении, полученное как алгебраическая сумма ординат прямой *LN* и параболы *LNML*.

Уравнение прямой *LN*

$$M_{ln} = -Fa - kz,$$

где *k* — тангенс угла наклона этой прямой:

$$k = [-F \cdot 2a - qa^2/2 - (-Fa)]/a = -F - qa/2.$$

Следовательно, уравнение изгибающих моментов, полученное как алгебраическая сумма уравнения прямой *LN* и параболы

Таблица VII.2

	hh_2l	$\frac{hh_3l}{2}$	$\frac{c_1 h}{2}$	$\frac{h(h_4 + h_5)l}{2}$
	$\frac{hh_2l}{2}$	$\frac{hh_3l}{3}$	$\frac{h(l+b)c_1}{6}$	$\frac{hl}{6}(2h_4 + h_5)$
	$\frac{hh_2l}{2}$	$\frac{hh_3l}{6}$	$\frac{h(a_1+l)c_1}{6}$	$\frac{hl}{6}(h_4 + 2h_5)$
	$\frac{h_2(h+h_1)l}{2}$	$\frac{h_3l}{6}(2h+h_1)$	$\frac{c_1 h}{6}[h(l+b) + h_1(l+a_1)]$	$\frac{1}{6}[h(2h_4+h_5) + h_1(2h_5+h_4)]$

	$\frac{ch_2 l}{2}$	$\frac{ch_3 (l+b)}{6}$	$\frac{cc_1 l}{6} \left[2 - \frac{(b_1 - b)^2}{b_1 a} \right]$	$\frac{c}{6} [h_4 (l+b) + h_5 (l+a)]$
	$\frac{ch_2 l}{2}$	$\frac{ch_3 (l+b)}{6}$	$\frac{cc_1 l}{6} \left[2 - \frac{(a_1 - a)^2}{a_1 b} \right]$	$\frac{c}{6} [h_4 (l+b) + h_5 (l+a)]$
<p>Καθάρια παραβολα</p>	$\frac{2flh_2}{3}$	$\frac{flh_3}{3}$	$c_1 f_1 (l^2 + a_1 b)$	$\frac{f l}{3} (h_4 + h_5)$
<p>Καθάρια παραβολα</p>	$\frac{f_1 l h_2}{3}$	$\frac{f_1 l h_3}{4}$	$\frac{c_1 f_1}{12} \left[l + b + \frac{b^2}{l} \right]$	$\frac{f_1 l}{12} [3h_4 + h_5]$

$LNMN$, имеет вид

$$M_z = M_{Lz} + M_0 = -Fa - \left(F + \frac{qa}{2}\right)z + \frac{qaz}{2} - \frac{qz^2}{2} =$$

$$= -Fa - Fz - \frac{qz^2}{2},$$

что совпадает с выражением (1).

При перемножении эпюр по правилу Верещагина следует перемножать трапецию $BLNC$ на трапецию из единичной эпюры на участке BC (рис. VII.20, z) и вычесть результат перемножения параболической эпюры $LNML$ (площадью $A = \frac{2}{3}a\frac{qa^2}{8}$) на ту же трапецию из единичной эпюры. Такой способ расслоения эпюр особенно выгоден, когда криволинейный участок эпюры находится на одном из средних участков балки.

Пример VII.12. Определить вертикальное и угловое перемещения консольной балки в месте приложения нагрузки (рис. VII.21).

Решение. Строим эпюру изгибающих моментов для грузового состояния (рис. VII.21, a).

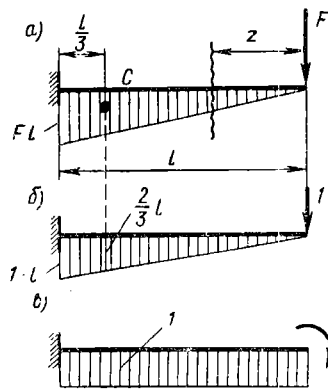
Для определения вертикального перемещения выбираем вспомогательное состояние балки с единичной силой в точке приложения нагрузки.

Строим эпюру изгибающих моментов от этой силы (рис. VII.21, b).

Определяем вертикальное перемещение по способу Мора:

$$v = \int_0^l \frac{M_k M_f dz}{EI}.$$

Значение изгибающего момента от нагрузки $M_f = -Fz$. Значение изгибающего момента от единичной силы $M_k = -1 \cdot z$.



Подставляем эти значения M_f и M_k под знак интеграции и интегрируем:

$$v = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Fz)(-z) dz = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Этот же результат был ранее получен другим способом.

Положительное значение прогиба показывает, что точка приложения нагрузки F перемещается вниз (в направлении единичной силы).

Если бы мы единичную силу направили снизу вверх, то имели бы $M_k = 1 \cdot z$ и в результате интегрирования получили бы прогиб со знаком минус. Знак

Рис. VII.21

минус показывал бы, что перемещение происходит не вверх, а вниз, как это и есть в действительности.

Вычислим теперь интеграл Мора путем перемножения эпюр по правилу Верещагина.

Так как обе эпюры прямолинейны, то безразлично, из какой эпюры брать площадь и из какой — ординату.

Площадь грузовой эпюры $A_f = 0,5Fl^2$.

Центр тяжести этой эпюры расположен на расстоянии $l/3$ от заделки.

Определяем ординату эпюры моментов от единичной силы, расположенную под центром тяжести грузовой эпюры. Легко убедиться, что она равна $\frac{2}{3}l$. Следовательно,

$$\Delta = \sum \frac{M_c M_c'}{EI} = \frac{1}{EI} A_f M_{kc} = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{2} Fl^2 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Тот же результат получается и по таблице интегралов. Результат перемножения эпюр положителен, так как обе эпюры располагаются снизу стержня. Следовательно, точка приложения нагрузки смещается вниз, т. е. по принятому направлению единичной силы.

Для определения углового перемещения (угла поворота) выбираем вспомогательное состояние балки, в котором на конце балки действует сосредоточенный момент, равный единице.

Строим эпюру изгибающих моментов для этого случая (рис. VII.21, в).

Определяем угловое перемещение, перемножая эпюры. Площадь грузовой эпюры $A_f = 0,5Fl^2$.

Ординаты эпюры от единичного момента везде равны единице. Следовательно, искомый угол поворота сечения $v = Fl^2/(2EI)$.

Так как обе эпюры расположены снизу, то результат перемножения эпюр положителен. Таким образом, концевое сечение балки поворачивается по часовой стрелке (по направлению единичного момента).

Пример VII.13. Определить со способу Мора — Верещагина угол поворота на левой опоре и прогиб посередине балки, представленной на рис. VII.22.

Решение. Строим приведенную эпюру M_{red} от нагрузки (рис. VII.22, а). Для определения угла v_A строим эпюру изгибающих моментов от единичного момента на левой опоре (рис. VII.22, б).

Для определения v_A перемножаем эпюру M_{red} на эпюру M_1

$$v_A = \frac{1}{2} l \cdot \frac{Fl}{EI} \cdot \frac{7}{9} + \frac{F}{2EI} l \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} l \cdot \frac{Fl}{EI} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \frac{Fl^2}{EI}$$

(по часовой стрелке).

Для определения прогиба посередине балки прикладываем в этом сечении единичную силу, строим эпюру моментов (рис. VII.22, в) и перемножаем ее на эпюру M_{red} . Ввиду симметрии задачу перемножения производим для половины балки и результат удваиваем:

$$v_c = 2 \left[\frac{1}{2} l \cdot \frac{Fl}{EI} \cdot \frac{l}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} l + \frac{l}{2} \right) \frac{l}{2} \cdot \frac{Fl}{2EI} \right] = \frac{31}{48} \cdot \frac{Fl^3}{EI} \text{ (вниз).}$$

Те же значения v_A и v_C были получены в примере VII.6 другим способом.

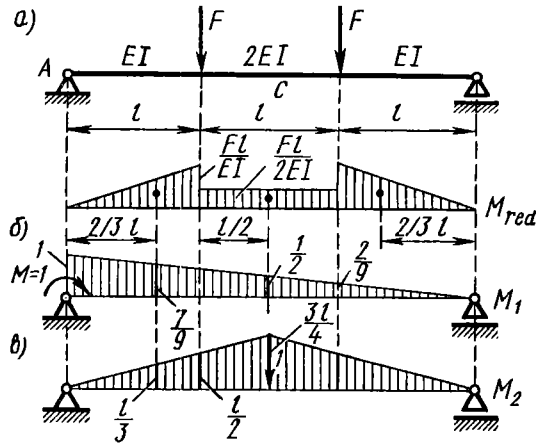


Рис. VII.22

Пример VII.14. Определить по способу Мора — Верещагина прогиб в точке D для балки, изображенной на рис. VII.23. Суммарная эпюра изгибающих моментов показана на рис. VI.14.

Решение. Строим расслоенную эпюру моментов от нагрузки, т. е. строим отдельные эпюры от действия каждой нагрузки. При этом для удобства перемножения эпюр целесообразно строить расслоенные (элементарные) эпюры относительно сечения, прогиб которого определяется в данном случае относительно сечения D .

На рис. VII.23, а представлена эпюра изгибающих моментов от реакции R_A (участок AD) и от нагрузки $F=40$ кН (участок DC). Эпюры строятся на сжатом волокне.

На рис. VII.23, б представлены эпюры моментов от реакции R_B (участок BD) от левой равномерно распределенной нагрузки (участок AD) и от равномерно распределенной нагрузки, действующей на участке BC . Эта эпюра изображена на рис. VII.23, в на участке DC снизу.

Далее выбираем вспомогательное состояние балки, для чего в точке D , где определяется прогиб, прикладываем единичную силу (рис. VII.23, г). Эпюра моментов от единичной силы изображена на рис. VII.23, д. Теперь перемножим эпюры с 1 по 7 на эпюры 8 и 9, пользуясь таблицами перемножения эпюр, с учетом знаков. При этом эпюры, расположенные с одной стороны балки, перемножаются со знаком плюс, а эпюры, расположенные по разные стороны балки, перемножаются со знаком минус.

При перемножении эпюр 1 и 8 получим

$$A_1 M_{BC} = -h_1 h_3 l / 3 = -40 \cdot 1 \cdot 2 / 3 = -80 / 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Перемножая эпюры 5 и 8, получим

$$-f_1 h_3 / 4 = -40 \cdot 2 \cdot 1 / 4 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Перемножение эпюр 2 и 9 дает

$$-(hl/6)(2h_4 + h_5) = -1 \cdot 2 (2 \cdot 160 + 80) / 6 = -400 / 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Перемножая эпюры 4 и 9

$$hh_3 l / 3 = 1 \cdot 280 \cdot 2 / 3 = 560 / 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Перемножаем эпюры 6 и 9

$$\begin{aligned} -\frac{hl}{6}(2h_4 + h_5) &= \\ = -\frac{1 \cdot 2}{6}(2 \cdot 120 + 40) &= \\ = -\frac{280}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Суммируя результаты перемножения эпюр, получим $EI\delta_D = -86,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$. Знак минус показывает, что точка D перемещается не вниз, как направлена единичная сила, а вверх. Этот же результат был получен ранее по универсальному уравнению (см. пример VII.11).

Конечно, в данном примере можно было расслбить эпюру только на участке AD , так как на участке DB суммарная эпюра прямая и ее незачем расслаивать. На участке BC расслоения не требуется, так как от единичной силы на этом участке эпюра равна нулю.

Расслоение эпюры на участке BC необходимо для определения прогиба в точке C .

Пример VII.15. Определить вертикальное, горизонтальное и угловое перемещения сечения B ломаного стержня, представленного на рис. VII.24, а. Жесткость сечения вертикального стержня EI_1 , жесткость сечения горизонтального участка EI_2 .

Решение. Строим эпюру изгибающих моментов от нагрузки. Она представлена на рис. VII.24, б (см. пример VI.9). Для определения вертикального перемещения сечения B выбираем вспомогательное состояние системы, представленное на рис. VII.24, в. В точке B приложена единичная вертикальная сила, направленная вниз.

Эпюра изгибающих моментов для этого состояния представлена на рис. VII.24, г.

Определяем вертикальное перемещение по методу Мора, используя способ перемножения эпюр. Так как на вертикальном стержне во вспомогательном состоянии эпюра M_1 отсутствует, то перемножаем только

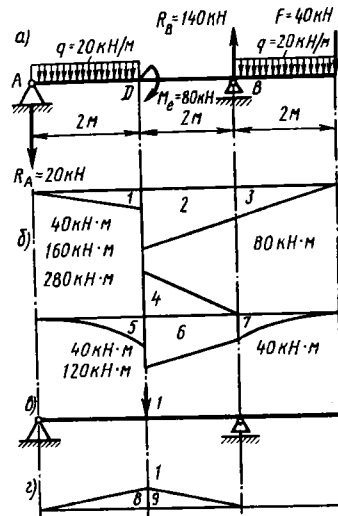


Рис. VII.23

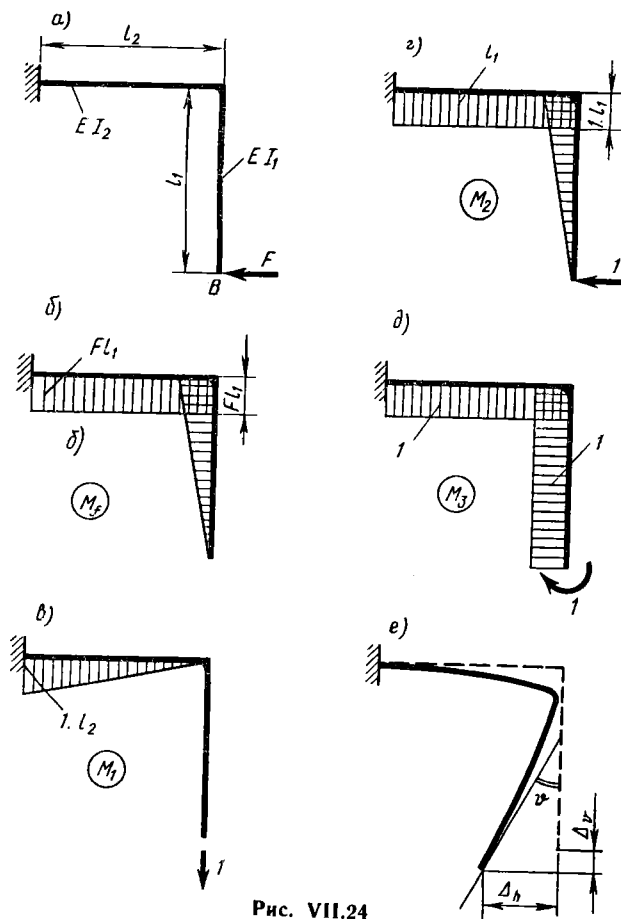


Рис. VII.24

эпюры, относящиеся к горизонтальному стержню. Площадь эпюры берем из грузового состояния, а ординату — из вспомогательного. Вертикальное перемещение

$$\Delta_v = \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_1 \frac{1}{2} l_2.$$

Так как обе эпюры расположены снизу, то результат перемножения берем со знаком плюс. Следовательно, точка *B* перемещается вниз, т. е. так, как направлена единичная вертикальная сила.

Для определения горизонтального перемещения точки *B* выбираем вспомогательное состояние с горизонтальной единичной силой, направленной влево (рис. VII.24, *г*). Эпюра моментов для этого случая представлена там же.

Перемножаем эпюры M_1 и M_2 и получаем

$$\Delta_h = \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} Fl_1 l_1 \frac{2}{3} l_1 + \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_2 l_1.$$

Результат перемножения эпюр положителен, так как перемноженные эпюры располагаются на одной и той же стороне стержней.

Для определения углового перемещения выбираем вспомогательное состояние системы по рис. VII.24, *д* и строим эпюру изгибающих моментов для этого состояния (на том же рисунке). Перемножаем эпюры M_1 и M_3

$$v = \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} Fl_1 l_1 \cdot 1 + \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_2 \cdot 1.$$

Результат перемножения эпюр положителен, так как перемноженные эпюры располагаются с одной стороны. Следовательно, сечение B поворачивается по часовой стрелке.

Те же результаты получились бы и при использовании таблиц перемножения эпюр.

Вид деформированного стержня показан на рис. VII.24, *е*, при этом перемещения сильно увеличены.

§ 63. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Балки, внутренние усилия в которых не могут быть найдены из одних только уравнений равновесия, называются **статически неопределимыми**.

Для расчета таких балок кроме уравнений статики необходимо составлять дополнительные уравнения, называемые **уравнениями перемещений** (или **уравнениями деформаций**).

Они получают из рассмотрения условий деформации балки.

Рассмотрим, например, балку, изображенную на рис. VII.25, *а*. Число неизвестных опорных реакций равно четырем: три реакции заделки и одна реакция подвижной опоры. Уравнений статики — три. Таким образом, лишних неизвестных — одно. Балка один раз статически неопределима. Лишние неизвестные в задачах такого типа являются результатом на-

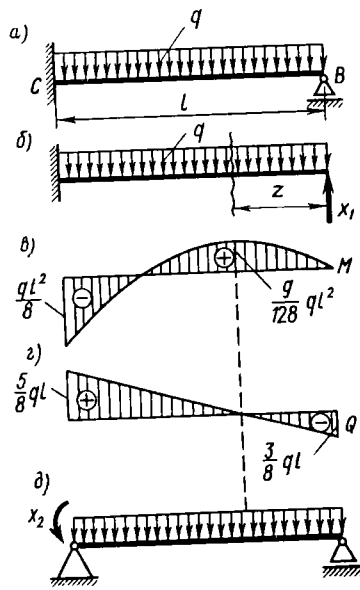


Рис. VII.25

личия связей, лишних для равновесия абсолютно твердого тела.

Для расчета статически неопределимых балок можно применить уже знакомый нам метод, который применялся для решения статически неопределимых задач при растяжении и кручении.

Для этого заданную статически неопределимую балку мысленно превращаем в статически определимую, удаляя лишние связи и заменяя их действие неизвестными реакциями.

Полученную таким образом статически определимую систему называют **основной системой**. Чтобы основная система не отличалась от заданной, необходимо потребовать, чтобы в основной системе перемещения сечений в местах удаленных связей по направлению приложенных здесь неизвестных реакций равнялись нулю. Эти уравнения, выражающие условия совместности перемещений основной системы со связями, наложенными на данную статически неопределимую систему, и дадут возможность решить поставленную задачу.

Эти уравнения так и называют **уравнениями совместности** (или **совместности**) **деформаций** (точнее, перемещений).

Для одной и той же статически неопределимой балки основная система может быть выбрана несколькими способами. Например, можно удалить подвижную опору, заменив ее неизвестной силой X_1 (рис. VII.25, б). Уравнение деформаций в этом случае будет выражать ту мысль, что для обеспечения эквивалентности заданной и основной системы вертикальное перемещение правого конца балки (точки B) под действием нагрузки q и силы X_1 должно быть равно нулю.

Для определения прогибов (перемещений) можно использовать уже известные нам способы: универсальные уравнения или метод Мора.

Если есть готовые формулы, то следует, конечно, их использовать.

Например, для составления уравнения перемещений (для основной системы по рис. VII.25, б) можно применить уже встречавшиеся нам формулы (VII.9) и (VII.24).

Приравняв прогибы правого конца консоли от равномерно распределенной нагрузки и от сосредоточенной силы, получим

$$ql^4/(8EI) = X_1 l^3/(3EI).$$

Из этого уравнения и определяем $X_1 = \frac{3}{8}ql$. После этого эпюры M (рис. VII.25, а) и поперечной силы Q (рис. VII.25, г) строятся, как в статически определимой балке.

Во втором варианте основной системы (рис. VII.25, д) удалена связь, препятствующая повороту левого сечения (заделка заменена шарнирно неподвижной опорой). Ее действие заменено

неизвестным моментом X_2 . Дополнительное уравнение выражает условие, что угол поворота сечения в точке C под действием нагрузки q и момента X_2 равен нулю.

Выбор той или иной основной системы не оказывает влияния на окончательный результат расчета. Окончательные эпюры M и Q будут одинаковы независимо от выбора основной системы.

Однако от выбора основной системы зависит бóльшая или меньшая трудоемкость расчета. Для балок с одной лишней неизвестной трудоемкость решения при любой системе практически одинакова. При нескольких лишних неизвестных выбирают

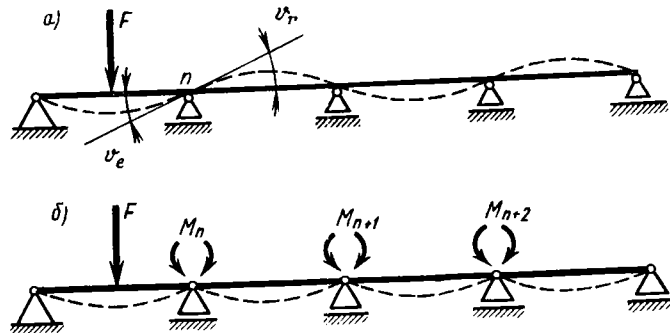


Рис. VII.26

основную систему таким образом, чтобы решение системы уравнений перемещений было связано с возможно меньшими вычислительными трудностями. Если для многопролетной балки (такие балки часто называют неразрезными, рис. VII.26, а) выбрать в качестве лишних неизвестных реакции отброшенных опор, то в каждое из уравнений перемещений войдут все лишние неизвестные, что приведет к большим трудностям при решении системы уравнений.

При рациональном выборе основной системы неизвестные в уравнениях перемещений будут разделены, т. е. в каждое из уравнений войдет меньшее число неизвестных. Конечно, общее число уравнений останется неизменным (равным числу лишних неизвестных), но вместо решения одной системы уравнений с большим числом неизвестных придется решать несколько более простых систем.

Так, в указанном случае существенное упрощение получится, если принять в качестве лишних неизвестных внутренние изгибающие моменты в сечениях, проходящих через промежуточные опоры (так называемые опорные моменты), как показано на

рис. VII.26, б. При этом в основной системе в балку над каждой промежуточной опорой «врезаны» шарниры, а нарушенная связь между пролетами балки, препятствующая взаимному повороту сечений, расположенных по обе стороны от опоры, заменена неизвестными опорными моментами.

При этом уравнения перемещений будут выражать условие равенства между собой углов поворота опорных сечений балки в смежных пролетах, например для сечения на опоре n (рис. VII.26, а): $\phi_l = \phi_r$.

Если раскрыть эти уравнения, то можно убедиться, что в каждое из них войдет не более трех опорных моментов.

Для расчета статически неопределимых балок, как и для любой другой статически неопределимой системы, можно использовать также один из энергетических методов, например метод, основанный на принципе наименьшей работы (см. § 19).

Для балки, приведенной на рис. VII.25, потенциальная энергия деформации равна

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dz = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(X_1 z - \frac{qz^2}{2} \right)^2 dz =$$

$$= \frac{1}{2EI} \left(\frac{X_1 l^3}{3} - \frac{X_1 q l^4}{4} + \frac{q^2 l^5}{20} \right).$$

На основании принципа наименьшей работы имеем

$$\partial U / \partial X_1 = \frac{2}{3} X_1 l^3 - q l^4 / 4 = 0, \text{ откуда } X_1 = 3q l / 8.$$

§ 64. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Пример VII.16. Построить эпюры M и Q для балки, показанной на рис. VII.27, а.

Решение. В этой конструкции, как легко убедиться, одна лишняя связь. Основную систему выбираем в виде консольной балки с удаленной правой опорой, замененной неизвестной реакцией X (рис. VII.27, б). Уравнение перемещений имеет вид $v_B = 0$.

От действия силы X (рис. VII.27, в) прогиб в точке B [см. формулу (VII.9)] равен

$$v_{BX} = X l^3 / (3EI).$$

Для определения прогиба в точке B от действия силы F (рис. VII.27, г) воспользуемся универсальным уравнением (VII.22). Помещаем начало координат на левом конце балки, тогда $v_0 = 0$ и $\phi_2 \rightarrow 0$.

Определяем опорные реакции: $R_D = F$ и $M_D = Fl/2$ (рис. VII.27, з).
 Записываем универсальное уравнение, полагая $z = l$:

$$EI v_{Bf} = -\frac{M_D(l-0)^2}{2} + \frac{R_D(l-0)^3}{6} - \frac{F(l-\frac{l}{2})^3}{6}$$

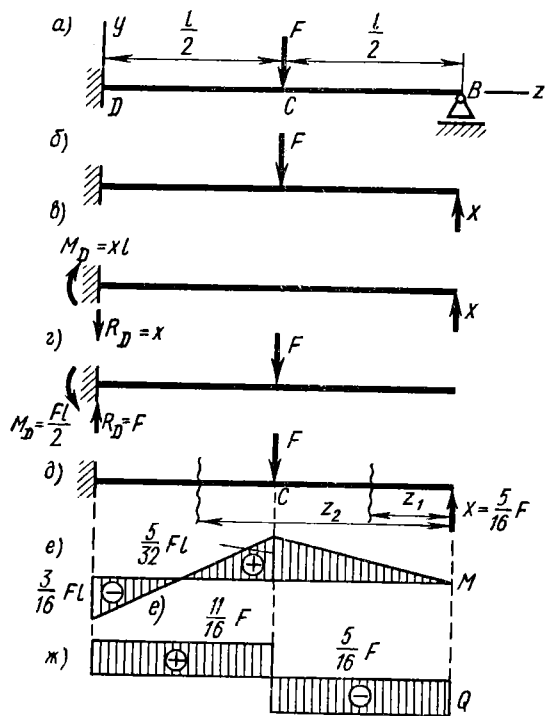


Рис. VII.27

Подставляя значения $M_D = Fl/2$ и $R_D = F$, получаем

$$v_{Bf} = -\frac{5Fl^3}{48EI}$$

Уравнение перемещений теперь запишется в виде $Xl^3/(3EI) - 5Fl/(48EI) = 0$, откуда $X = \frac{5}{16}F$.

Изгибающий момент в любом сечении участка CB на расстоянии z_1 от правого конца (рис. VII.27, д)

$$M_{z_1} = Xz_1 = 5Fz_1/16.$$

На участке DC :

$$M_{z_2} = 5Fz_2/16 - F(z_2 - l/2).$$

Эпюра M показана на рис. VII.27, е.

Поперечная сила на участке CB : $Q_{z_1} = -X - 5/16F$; на участке DC :

$$Q_{z_2} = -5/16F + F = 11/16F.$$

Эпюра Q показана на рис. VII.27, ж.

Пример VII.17. Построить эпюры M и Q для двухпролетной балки, показанной на рис. VII.28, а.

Решение. Задача один раз статически неопределима, за лишнее неизвестное принимаем реакцию X средней опоры (рис. VII.28, б). Уравнение перемещений $v_B = 0$.

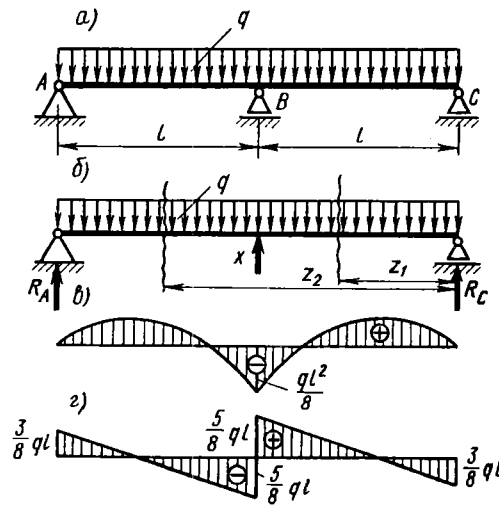


Рис. VII.28

При решении этого примера в отличие от предыдущего основную систему, нагруженную только заданными силами, а также основную систему, нагруженную только искомой реакцией X , на чертеже не показываем.

Прогиб в точке B от действия нагрузки q определяем по формуле (VII.28)

$$v_{Bq} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{q (2l)^4}{EI}.$$

Прогиб в точке B от действия силы X определяем по формуле (VII.29)

$$v_{BX} = X (2l)^3 / (48EI).$$

Уравнение перемещений принимает вид

$$\frac{-5q (2l)^4}{384EI} + \frac{X (2l)^3}{48EI} = 0,$$

откуда

$$X = 5/4ql.$$

Реакции R_A и R_C равны

$$R_A = R_C = ql - \frac{5}{8}ql = \frac{3}{8}ql.$$

Изгибающий момент в любом сечении на расстоянии z_1 от опоры C участка BC

$$M_{z_1} = 3/8qlz_1 - qz_1^2/2.$$

По этому уравнению строим эпюру M (рис. VII.28, в). Для левой половины балки эпюра симметрична.

Поперечная сила на участке BC

$$Q_{z_1} = -\frac{3}{8}ql + qz_1,$$

на участке AB

$$Q_{z_2} = \frac{3}{8}ql - \frac{5}{4}ql + qz_2.$$

По этим уравнениям строим эпюру Q (рис. VII.28, г).

§ 65. ОСНОВЫ ОБЩЕГО МЕТОДА РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ (ОСНОВЫ МЕТОДА СИЛ)

В предыдущих параграфах рассматривались статически неопределимые балки.

В технике встречаются и более сложные статически неопределимые системы, т. е. системы, внутренние усилия в которых не могут быть определены из одних уравнений равновесия.

Статически неопределимые системы, состоящие из жестко связанных между собой стержней, называют рамами. Методы расчета статически неопределимых стержневых систем подробно излагаются в курсе «Строительная механика».

Эти методы весьма разнообразны. Здесь мы изложим лишь основы одного из наиболее распространенных методов — метода сил — и проиллюстрируем его примерами простейших статически неопределимых систем.

При расчете статически неопределимых систем по методу сил в качестве неизвестных принимают усилия, заменяющие действие отброшенных (лишних) связей.

Лишние связи — это связи, лишние с точки зрения обеспечения неподвижности бруса как жесткого целого. На плоскости неподвижность бруса может быть обеспечена тремя соответству-

ющим образом наложенными связями. Такие связи называют **необходимыми**.

Связи, наложенные на тело сверх необходимых, называют **дополнительными** или **лишними**.

В пространстве неподвижность бруса обеспечивается шестью связями.

Порядок расчета статически неопределимых систем по методу сил состоит в следующем.

1. Вначале определяется степень статической неопределимости системы путем подсчета числа лишних связей.

2. Затем выбирается **основная система**, которая получается из заданной системы после удаления лишних связей. Удаленные связи заменяются лишними неизвестными усилиями.

3. Составляются уравнения деформаций (точнее, перемещений), которые выражают условия совместности перемещений основной системы с заданной статически неопределимой системой. Если перемещения по направлению отброшенных связей в основной системе должны быть равны нулю, то уравнения перемещений выражают равенство нулю этих перемещений.

4. Решаются полученные уравнения.

5. После определения лишних неизвестных находятся внутренние усилия в элементах статически неопределимой системы (изгибающие моменты, поперечные силы и т. д.). Это производится без затруднений на основе метода сечений.

Уравнения перемещений при расчете статически неопределимых систем методом сил записываются в определенной (**канонической**) форме.

Если заданная статически неопределимая система имеет n лишних неизвестных, то система n канонических уравнений для определения этих неизвестных в общем виде записывается так:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1f} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2f} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nf} = 0.$$

В первом уравнении δ_{11} — перемещение точки приложения первого лишнего неизвестного по собственному направлению, вызванное действием единичного значения этого неизвестного. Произведение $\delta_{11}X_1$ представляет собой перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное силой X_1 .

Второй член $\delta_{12}X_2$ есть перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное силой X_2 , и т. д.

Член Δ_{1f} есть перемещение в том же месте и по тому же направлению, вызванное нагрузкой.

В целом вся левая часть первого уравнения представляет собой суммарное перемещение точки приложения силы X_1 по направлению этой силы, вызванное всеми силами.

Это перемещение приравнивается нулю, так как в заданной системе оно отсутствует.

Второе уравнение выражает то условие, что суммарное перемещение точки приложения силы X_2 по направлению этой силы от всех воздействий равно нулю.

Смысл остальных уравнений ясен.

Трудности расчета статически неопределимых систем состоят не в составлении этих уравнений, а в их решении.

При небольшом числе уравнений они могут быть без затруднений решены способом последовательного исключения неизвестных. При большом числе уравнений применяются специальные приемы, облегчающие их решение (способ Гаусса, способ последовательных приближений и машинный способ); более подробно эти вопросы рассматриваются в курсе «Строительная механика».

Технику расчета простейших статически неопределимых систем покажем на конкретных примерах.

Пример VII.18. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, представленной на рис. VII.29, а. Жесткость стержней одинакова.

Решение. Эта рама один раз статически неопределима. Действительно, всего неизвестных опорных реакций четыре (три в заделке и одна в правой опоре). Уравнений же равновесия только три.

За основную принимаем систему, показанную на рис. VII.29, б, которая получается из заданной путем удаления правой опоры. Лишнее неизвестное, компенсирующее удаленную связь, обозначаем X_1 . Составляем уравнение перемещений, для этого приравняем нулю перемещение по направлению X_1 .

Для данного случая каноническое уравнение имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} = 0,$$

где δ_{11} — перемещение по направлению первого неизвестного от единичного значения этого же неизвестного; Δ_{1f} — перемещение по направлению первого неизвестного от нагрузки.

Для определения перемещений применяется метод Мора — Верещагина (перемножаем эпюры).

На рис. VII.29, а приведена эпюра изгибающих моментов от нагрузки.

На рис. VII.29, г показана эпюра моментов \bar{M}_1 от единичной силы $X_1 = 1$.

Для определения перемещения δ_{11} перемножаем эпюру \bar{M}_1 саму на себя. Получим

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EI}.$$

Для определения перемещения Δ_{1f} перемножаем эпюры M_f и \bar{M}_1 , учитывая, что они расположены с разных сторон стержня (горизонтального):

$$\Delta_{1f} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^4}{4EI}$$

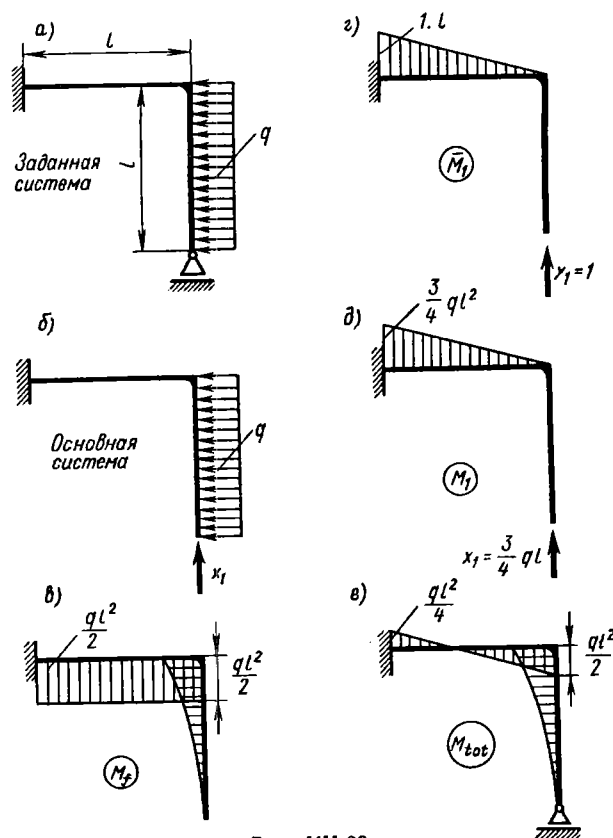


Рис. VII.29

Следовательно,

$$l^3 X_1 / (3EI) - ql^4 / (4EI) = 0,$$

откуда $X_1 = \frac{3}{4} ql$.

Получившееся положительное значение X_1 свидетельствует о том, что принятое направление для X_1 соответствует истинному.

Задача решена.

Теперь можно построить эпюру изгибающих моментов для задан-

ной системы. Это проще всего сделать следующим путем: необходимо увеличить эюру \bar{M}_1 в $\frac{3}{4}ql$ раз (получится эюра M_1) и сложить ее с эюрой M_f .

Эюра M_1 показана на рис. VII.29, д. Суммируя ее с эюрой M_f , получим окончательную (суммарную) эюру M_{tot} , представленную на рис. VII.29, е.

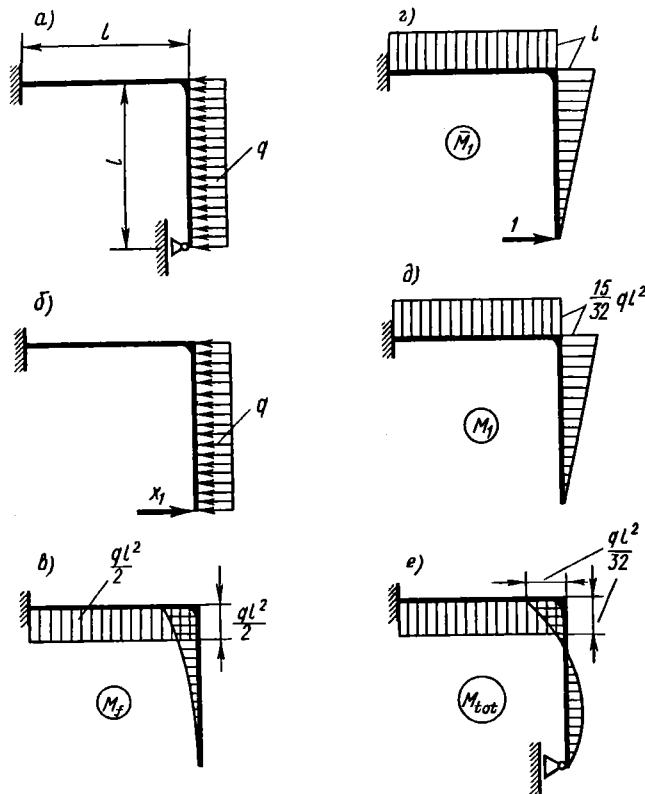


Рис. VII.30

Пример VII.19. Построить эюру изгибающих моментов для рамы, представленной на рис. VII.30, а.

Решение. Эта рама также один раз статически неопределима. Основная система представлена на рис. VII.30, б; на рис. VII.30, в — эюра моментов от нагрузки и на рис. VII.30, г — эюра от единичного значения лишнего неизвестного.

Каноническое уравнение перемещений

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

Вычисляем δ_{11} перемножением эпюры \bar{M}_1 самой на себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI} \cdot l \cdot l = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EI}.$$

Вычисляем Δ_{1f} перемножением эпюр M_f и \bar{M}_1 .

При перемножении квадратной параболы на треугольник (на вертикальном стержне) воспользуемся данными из табл. VII.2 перемножения эпюр:

$$\Delta_{1f} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l \cdot l}{2} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot ll = -\frac{5ql^4}{8EI}.$$

Следовательно, $X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = 15ql/32$.

Увеличиваем ординаты эпюры \bar{M}_1 в $15ql/32$ раз (рис. VII.30, д) и складываем их с ординатами эпюры M_f .

Суммарная эпюра моментов представлена на рис. VII.30, е.

Пример VII.20. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, представленной на рис. VII.31, а.

Решение. Эта рама дважды статически неопределима. В качестве основной системы выбираем ломаный брус, представленный на рис. VII.31, б.

Канонические уравнения для системы с двумя неизвестными имеют вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0.$$

Первое уравнение выражает условие, что перемещение по направлению первого неизвестного от всех воздействий равно нулю, а второе уравнение — условие, что перемещение по направлению второго неизвестного от всех воздействий равно нулю.

Коэффициенты уравнений определяются перемножением эпюр.

Перемещения δ_{11} и δ_{22} называются **главными**, а δ_{12} и δ_{21} — **побочными**. На основании теоремы Максвелла о взаимности перемещений имеем $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Эпюры от нагрузки, а также от единичных значений лишних неизвестных показаны на рис. VII.31, в, г, д.

Перемножая эпюру \bar{M}_1 саму на себя, получим (см. предыдущий пример):

$$\delta_{11} = 4l^3/(3EI); \quad \delta_{22} = l^3/(3EI) \quad (\text{то же}); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot ll = \frac{l^3}{2EI};$$

$$\Delta_{1f} = -\frac{5}{8} \frac{ql^4}{EI}; \quad \Delta_{2f} = -\frac{ql^4}{4EI}.$$

Подставляя результаты в канонические уравнения и сокращая на общий множитель $l^3/(EI)$, получаем

$$4/3 X_1 + 1/2 X_2 - 5/8 ql = 0; \quad 1/2 X_1 + 1/3 X_2 - 1/4 ql.$$

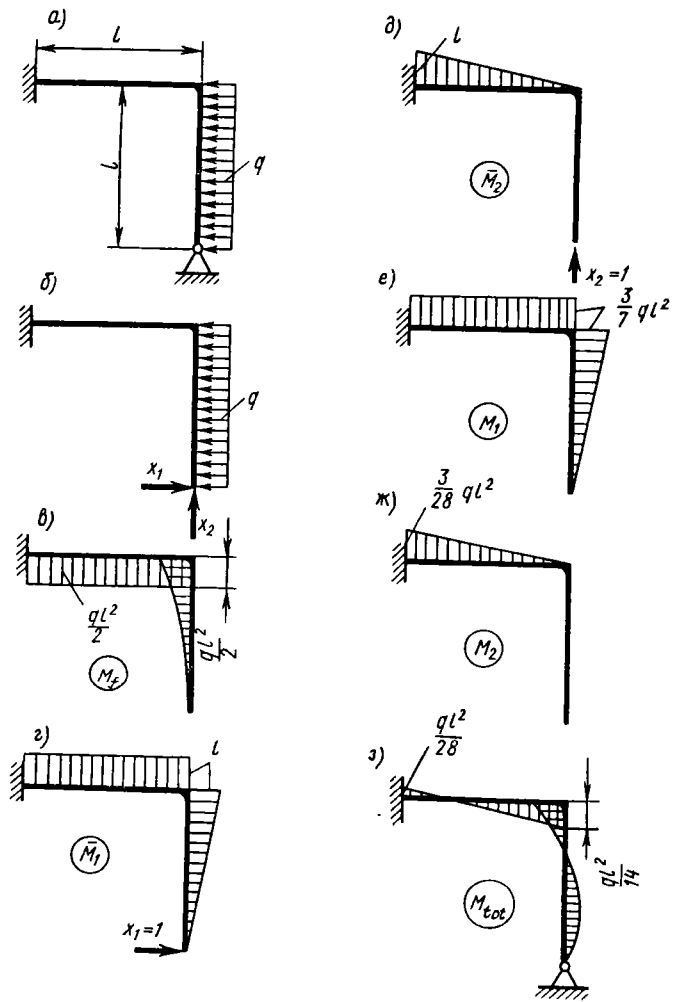


Рис. VII.31

Решив эту систему уравнений, имеем

$$X_1 = \frac{3}{7} ql; \quad X_2 = \frac{3}{28} ql.$$

Эпюры моментов от действия X_1 и X_2 показаны на рис. VII.31, е, ж.

Суммарная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. VII.31, з.

Пример VII.21. Определить усилия в стержнях системы, рассмотренной в § 20 (рис. VII.32, а).

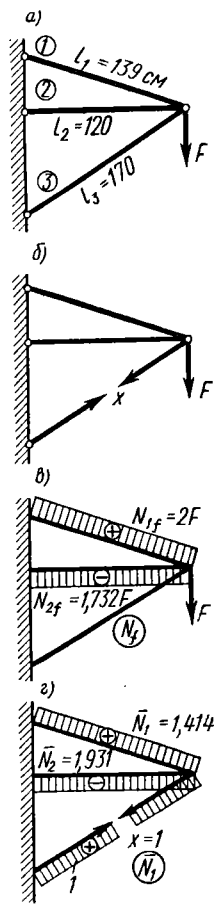


Рис. VII.32

Решение. Система один раз статически неопределима. За лишнее неизвестное примем усилие в нижнем стержне (рис.VII.32, б). Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

Так как в этой системе стержни могут работать только на растяжение и сжатие, то перемещение определяем по формуле

$$\delta = \sum \frac{N_k N_f l_i}{E_i A_i}$$

или по правилу Верещагина, перемножая соответствующие эпюры продольных сил (рис.VII.32, в, г).

Усилия в стержнях 1 и 2 от нагрузки равны (см. пример II.12): $N_{1f} = 2F$ (растяжение); $N_{2f} = -1,732F$ (сжатие). Усилия в стержнях 1 и 2 от неизвестного $X=1$ равны: $\bar{N}_1 = 1,414$ (растяжение); $\bar{N}_2 = -1,931$ (сжатие).

Вычисляем перемещения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{E} \sum \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{A_i} = \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{1,414^2 \cdot 139}{3,14} + \frac{1,931^2 \cdot 120}{3,14} + \frac{1^2 \cdot 170}{21,9} \right) = \\ &= \frac{238,75}{E}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1f} &= \frac{1}{E} \sum \frac{\bar{N}_i N_{f_i} l_i}{A_i} = \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{1,414 \cdot 2F \cdot 139}{3,14} + \frac{1,931 \cdot 1,732F \cdot 120}{3,14} \right) = \frac{253F}{E}. \end{aligned}$$

Находим

$$X = N_3 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = -\frac{253F}{238,75} = -1,059F \text{ (сж.)};$$

$$N_1 = 2F - 1,414 \cdot 1,059F = 0,503F;$$

$$N_2 = -1,732F + 1,931 \cdot 1,059F = 0,315F.$$

Этот результат совпадает с тем, который был получен в примере II.12 другим способом.

Пример VII.22. Построить эпюры M и Q для балки, показанной на рис. VII.33, а.

Решение. Эта балка один раз статически неопределима, так как удлинение нижнего волокна балки при изгибе устранено наличием неподвижных шарнирных опор на уровне нижнего волокна (балка была бы статически определима при размещении опорных шарниров на уровне оси балки).

За лишнее неизвестное примем горизонтальную силу H (распор), для определения которого используем обычное каноническое уравнение метода сил (рис. VII.33, б)

$$\delta_{11}H + \Delta_{1f} = 0.$$

Перемещения определяем по способу Мора—Верещагина, при этом перемещение δ_{11} определяем по формуле (VII.45):

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2 dz}{EI} + \int_0^l \frac{N_1^2 dz}{EA},$$

т. е. с учетом действия продольной силы, так как ее влияние в данном случае, как будет показано далее, значительно. Соответствующие эпюры показаны на рис. VII.33, в, г, д для случая действия равномерно распределенной нагрузки q .

Тогда для балки с осью посередине высоты по способу Верещагина получим

$$\delta_{11} = \frac{h^2 l}{4EI} + \frac{l}{EA}; \quad \Delta_{1f} = \int_0^l \frac{M_1 M_f dz}{EI} = -\frac{q h l^3}{24EI}.$$

Подставляя эти значения в каноническое уравнение, получим

$$H = \frac{q h l^3 / (24EI)}{h^2 l / (4EI) + l / (EA)}.$$

Второй член в знаменателе отражает влияние продольных сил. Если пренебречь этим влиянием, то

$$H = q l^2 / (6h).$$

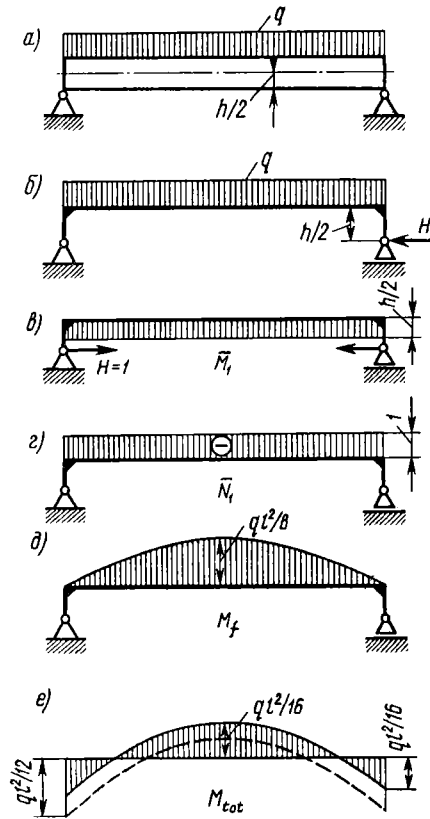


Рис. VII.33

Формулу для H можно представить в следующем виде:

$$H = \frac{ql^2}{6h} K,$$

где K — коэффициент, характеризующий влияние продольных сил; он зависит от формы поперечного сечения балки:

$$K = 1 / \left(\frac{Ah^2}{4I} + 1 \right).$$

Для частных случаев: круглого сечения $K=0,80$; прямоугольного и квадратного сечений $K=0,75$; двутаврового $K=0,63$.

Судя по коэффициенту K , влияние продольных сил существенно, особенно для двутавровых балок.

Определив H , легко найти изгибающие моменты в любом сечении по общей формуле

$$M = M_f + M_1 H.$$

Например, для балки прямоугольного сечения получим изгибающий момент на опоре:

$$M_0 = -Nh/2 = -Kql^2/12 = -ql^2/16;$$

посередине пролета — $M_{l/2} = \frac{ql^2}{16}$. Соответствующая эпюра M_{tot} , построенная на рис. VII.33, *e*.

Пренебрегая влиянием нормальных сил, соответственно получаем

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12} \quad \text{и} \quad M_{l/2} = \frac{ql^2}{24},$$

т. е. то же самое, что и для балки, полностью защемленной по концам (рис. VII.33, *e*, пунктир).

Действительно, в последнем случае условие неизменяемости длины нижнего волокна вместе с условием неизменяемости длины осевой линии балки ($N=0$) равносильно условию защемления концов балки.

Эпюра поперечной силы Q будет такой же, как и для статически определимой балки (см. рис. VI.12).

§ 66. РАЦИОНАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ОПОР БАЛОК

С точки зрения экономии материала имеет существенное значение правильное размещение опор балок (если к этому нет препятствий по производственным или другим соображениям). Это относится и к статически определимым, и к статически неопределимым балкам*.

* Более подробно эти вопросы рассмотрены в кн.: С т е п и н П. А., С н е с а р е в Г. А. Экономия материалов при конструировании машин. Машгиз, 1960.

В простой балке, опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, наибольший изгибающий момент (рис. VII.34, а) имеет место посередине пролета: $M_{\max} = ql^2/8$. Нетрудно убедиться, что в балке такой же длины, но при наличии консолей (рис. VII.34, б) изгибающий момент будет меньше.

Максимальный изгибающий момент имеет наименьшее значение тогда, когда момент в опорном сечении равен максимальному моменту в пролете. Это условие выполняется при длине каждой консоли $0,207l$. Получающийся максимальный изгибающий момент равен $M_{\max} = ql^2/46,6$.

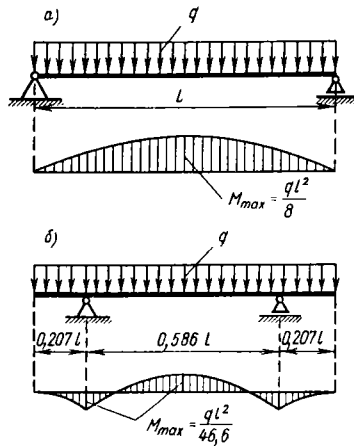


Рис. VII.34

Таким образом, надлежащим размещением опор изгибающий момент удастся уменьшить примерно в шесть раз.

Рекомендуется учащемуся самостоятельно определить наиболее выгодную длину однокон-

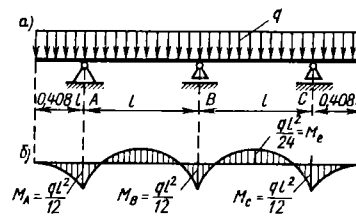


Рис. VII.35

сольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В двухпролетной статически неопределимой балке приходится иметь дело с тремя различными изгибающими моментами: M_A , M_B и моментом в пролете M_l (рис. VII.35, а, б). Чтобы балка имела наименьшее сечение, постоянное по всей длине, необходимо добиться равенства двух наибольших моментов из трех указанных.

Также рекомендуется учащимся доказать, что наименьшее значение максимальных изгибающих моментов получается при длине консолей равной $0,408l$; при этом $M_A = M_C = ql^2/12$; $M_l = ql^2/24$.

Для двухпролетной балки без консолей той же длины ($0,408l \cdot 2 + 2l$) наибольший изгибающий момент будет в сечении

над средней опорой (см. рис. VII.35 и VII.28):

$$M = q (1,408l)^2 / 8 = ql^2 / 4.$$

Таким образом, введение двух консолей в этом случае позволяет уменьшить расчетный момент в три раза. Для трехпролетной балки без консолей наивыгоднейшая разбивка на пролеты показана на рис. VII.36, а, для пятипролетной — на рис. VII.36, б.

Соответствующий анализ позволяет установить наивыгоднейшее размещение опор и при других видах нагрузки. Пусть, например, нагрузкой интенсивностью q нагружен любой участок балки. При загрузке консолей (рис. VII.37, а) нагрузкой q_1 получим $M'_{\max} = q_1 a^2 / 2$ (при отсутствии нагрузки в пролете).

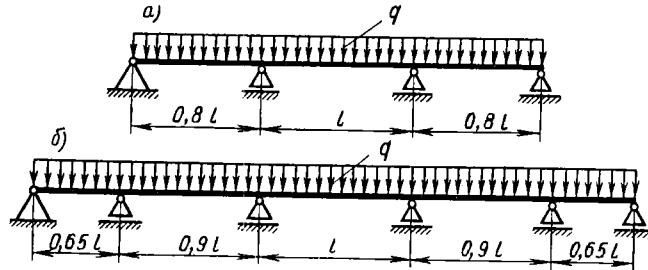


Рис. VII.36

При нагружении участка между опорами (рис. VII.37, б) нагрузкой q_2 получим $M''_{\max} = q_2 l^2 / 8$ (при отсутствии нагрузки на консолях).

Приравняв максимальные значения моментов, имеем оптимальное значение длины консоли $a = 0,5l \sqrt{q_2 / q_1}$.

Необходимо отметить, что не всегда определяющим является расчет на прочность по изгибающим моментам.

В некоторых случаях размещение опор приходится производить из условия жесткости, чтобы получить наименьшие прогибы. Например, для простой балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. VII.34, а), наибольший прогиб посередине

$$v = -5ql^4 / (384EI) = -0,013ql^4 / (EI).$$

При наличии двух консолей прогиб посередине балки уменьшится (см. рис. VII.34, б). Оптимальную длину консоли получим из условия, чтобы прогиб на конце консоли равнялся прогибу балки посередине пролета. Воспользовавшись универсальным уравнением и опуская выкладки, которые рекомендуется проде-

лать учащемуся, получим оптимальную длину консоли из условия жесткости: $a=0,223l$.

При такой длине консоли наибольший прогиб балки составит $0,00095ql^4/(EI)$, что меньше прогиба бесконсольной балки в 13,7 раза. Это и не удивительно, так как в формулу прогиба длина балки входит в четвертой степени. Поэтому, например, при уменьшении длины балки в два раза прогиб балки уменьшается в 16 раз.

Отметим в качестве примера, что в железнодорожных вагонах длина консолей принимается равной $a \approx 0,14l$.

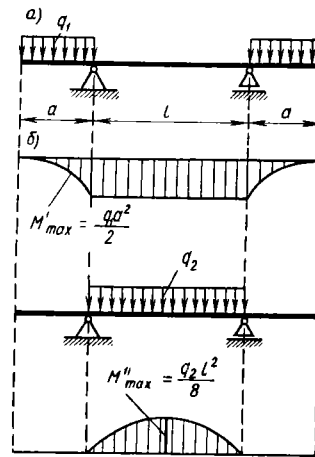


Рис. VII.37

§ 67. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ БАЛОК

Наиболее выгодными сечениями балок с точки зрения затрат материала являются такие, у которых наибольшая доля материала размещена в верхней и нижней частях сечения, где напряжения наибольшие и материал поэтому наиболее полно используется (рис. VII.38, а).

Для количественной оценки рациональности сечения (по затрате материала) может служить безразмерная величина

$$\omega_x = W_x / \sqrt{A^3},$$

называемая осевым удельным моментом сопротивления.

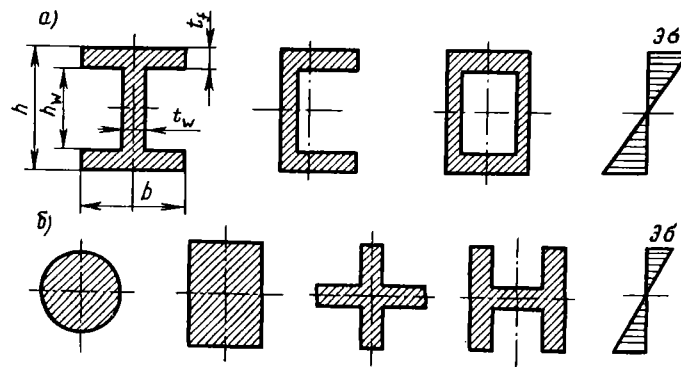


Рис. VII.38

Таблица VII.3

Тип сечения	ω_x
Круг	0,14
Квадрат	0,167
Кольцо $c = d/D = 0,9$	0,58
Швеллер	0,57—1,35
Двутавр обыкновенный	1,02—1,51

Величина ω_x зависит только от формы сечения.

В табл. VII.3 приведены значения ω_x для некоторых наиболее распространенных сечений.

Как видим, наименее выгодными являются круглое, квадратное и подобные им сечения, у которых большое количество материала сконцентрировано у нейтральной оси, где материал напряжен весьма мало (рис. VII.38, б).

Наиболее выгодными являются сечения в форме двутавра, швеллера* и коробчатые (рис. VII.38, а).

Большое практическое значение имеет вопрос о рациональной высоте балок двутаврового профиля, поскольку этот профиль является основным балочным профилем, выпускаемым нашими заводами.

При решении этой задачи возможны следующие упрощения.

1. Толщиной полки t_f можно пренебречь по сравнению с высотой стенки h_w , поэтому высоту стенки h_w можно отождествить с высотой всей балки h (рис. VII.38, а).

2. При вычислении момента инерции сечения относительно нейтральной оси можно пренебречь моментом инерции полки относительно собственной центральной оси.

При этих допущениях момент инерции сечения

$$I_x = 2A_f (h/2)^2 + t_w h^3/12 = A_f h^2/2 + t_w h^3/12,$$

где A_f — площадь сечения полки.

Момент сопротивления

$$W_x = 2I_x/h = A_f h + t_w h^2/6,$$

отсюда $A_f = W_x/h - t_w h/6$.

Следовательно, полная площадь сечения

$$A = 2A_f + A_w = 2W_x/h - 2t_w h/6 + t_w h = 2W_x/h + 2/3 t_w h.$$

* При условии, что исключена возможность закручивания балки.

Теперь можем найти значение h , при котором площадь сечения будет наименьшей. Для этого необходимо установить связь между толщиной стенки t_w и высотой h .

На рис. VII.39 показана зависимость толщины стенки t_w от высоты h двутавровых балок по действующему сортаменту ГОСТ 8239—72 (кривая 1) и по более экономичному сортаменту США (кривая 2). Кривая 3 представляет зависимость t_w от h для «идеального», наиболее экономичного сортамента, в котором минимальная толщина для двутавра № 10 принята 4,5 мм

(из соображений коррозии), а максимальная толщина для двутавра № 70 принята 10 мм ($h/t = 70$) из условия обеспечения местной устойчивости, т. е. предотвращения местного выпучивания стенки. Идеальный сортамент трудно получить на прокатных станах, однако его можно получить сваркой, с применением сварочных автоматов.

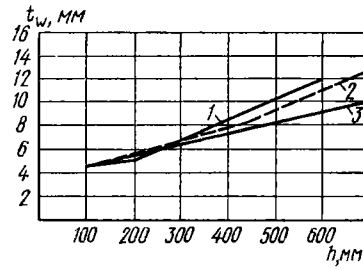


Рис. VII.39

Из рисунка видно, что зависимость t_w от h может быть приближенно выражена уравнением прямой линии, не проходящей через начало координат:

$$t_w = \alpha + \beta h. \quad (\text{VII.49})$$

Коэффициенты α и β для балок по ГОСТ 8239—72 равны: $\alpha = 3$ мм и $\beta = 0,015$. Для «идеального» профиля коэффициенты получаются равными $\alpha = 3,58$ мм, $\beta = 0,0092$.

Используя зависимость для t_w (VII.49), получим для площади сечения

$$A = 2W_x/h + 2/3\alpha h + 2/3\beta h^2. \quad (\text{VII.50})$$

Оптимальную высоту балки найдем, приравняв нулю производную $dA/dh = 0$:

$$W_x - \alpha h_{opt}^2/3 - 2\beta h_{opt}^3/3 = 0. \quad (\text{VII.51})$$

Решая это кубическое уравнение, определяем h_{opt} . Для решения уравнения можно использовать таблицы, способ повторных попыток и, наконец, графический способ. Для этого задаются несколькими значениями h_{opt} , вычисляют по формуле (VII.51) W_x и строят график зависимости между этими величинами. Имея такой график, легко решить обратную задачу: по заданному W_x определить h_{opt} .

На рис. VII.40 кривой 2 представлена оптимальная зависимость между W_x и h по уравнению (VII.51) при $\alpha=3,58$ мм и $\beta=0,0092$. Там же в виде кривой 1 представлена зависимость между W_x и h для двутавровых балок по ГОСТ 8239—72.

Из сравнения кривых видно, что высота балок существующего сортамента занижена против оптимальной высоты «идеального» сортамента, что приводит к перерасходу металла (10—20 %).

При $\alpha=0$ из формулы (VII.51) получим приближенную формулу

$$h_{opt} = \sqrt[3]{3W_x / (2\beta)}, \quad (VII.52)$$

которой пользуются, например, при определении высоты сварных балок.

Если материал балки имеет различное сопротивление на растяжение и сжатие

(например, чугун), то симметричное относительно нейтральной оси сечение становится неэкономичным.

Сравним, например, два сечения чугунной балки: двутавровое и тавровое (рис. VII.41).

В двутавровом сечении (рис. VII.41, а, б) наибольшие напряжения в крайних волокнах равны между собой. Размеры сечения будут определяться допустимым напряжением на растяжение, которое меньше, чем допустимое напряжение на сжатие. Напряжение в сжатой зоне будет меньше допустимого. Материал используется не полностью.

При тавровом сечении (рис. VII.41, в) нейтральная ось сместится по направлению к полке, эпюра напряжений имеет вид, показанный на рис. VII.41, г.

Напряжения в крайних волокнах полки меньше, чем напряжения в крайних волокнах стенки. Поэтому при применении

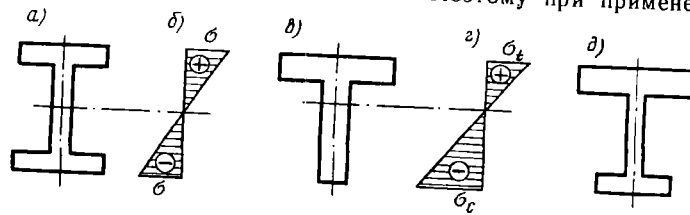


Рис. VII.41

таких балок проверку прочности приходится производить в двух сечениях: по наибольшему положительному и по наибольшему отрицательному изгибающим моментам.

При однозначной эпюре изгибающих моментов полку выгоднее поместить в растянутой зоне, а стенку — в сжатой. В этом случае можно так подобрать размеры стенки и полки, что растягивающие и сжимающие напряжения будут равны допустимым. Следовательно, материал будет использован полностью.

Еще более рациональным по расходу материала для чугунных балок является сечение, показанное на рис. VII.41, *д*. Толщина стенки принимается минимальной по расчету на касательные и главные напряжения. Соответствующим подбором размеров полки можно получить необходимое смещение нулевой линии, с тем чтобы напряжения в крайних волокнах были равны допустимым на растяжение и сжатие.

При подборе сечений балок следует также иметь в виду, что изгибающие моменты изменяются по длине балки. Поэтому в целях экономии материала выгодно применять балки переменного сечения (рис. VII.42).

Изложенная выше методика анализа рациональности сечений по прочности может быть использована и для анализа рациональности сечений по жесткости, т. е. с точки зрения получения наименьшей площади сечения при заданном моменте инерции.

Не имея возможности останавливаться в кратком курсе на этом важном и интересном вопросе, предлагаем его учащемуся для самостоятельного исследования.

В частности, рекомендуем доказать, что для двутаврового сечения оптимальная по жесткости высота получается из уравнения

$$\frac{2}{3}\beta h_{opt}^4 + \frac{\alpha}{3}h_{opt} - 4I_x = 0.$$

Значения α и β те же, что и выше.

Рекомендуется также определить оптимальную высоту таврового сечения.

В заключение следует отметить, что сортамент двутавровых профилей 1972 г. является шагом назад по сравнению с предыдущим сортаментом 1956 г., так как в нем исчезли большие профили (№ 65, 70, 70а, 70б), а профили № 40, 45, 50, 55,

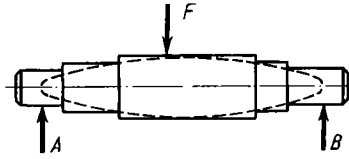


Рис. VII.42

60 выпускают теперь с более толстой стенкой, т. е. менее экономичными.

Пример VII.23. Подобрать балку «идеального» двутаврового профиля для примера VI.10 (см. § 53).

Решение. По графику, приведенному на рис. VII.40, определяем h_{opt} по моменту сопротивления $W_x = 1125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$. Получим $h_{opt} = 51 \text{ см}$. Площадь сечения находим по формуле (VII.50):

$$A = \frac{2 \cdot 1125 \cdot 10^{-6}}{0,51} + \frac{2}{3} \cdot 0,358 \cdot 0,51 + \frac{2}{3} \cdot 0,0092 \cdot 0,51^2 = \\ = 72,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 72,3 \text{ см}^2.$$

В примере VI.10 был принят двутавр № 45, площадь сечения которого $A = 84,7 \text{ см}^2$, что на 17,2 % больше площади «идеального» (по прочности) сечения.

ГЛАВА VIII
ГИПОТЕЗЫ ПЛАСТИЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ
(ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ)

§ 68. НАЗНАЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ ПРОЧНОСТИ

До сих пор изучались расчеты на прочность в случаях, когда материал находится или в одноосном напряженном состоянии (растяжение, сжатие), или простейшем двухосном, когда главные напряжения в каждой точке равны между собой по значению и противоположны по знаку (сдвиг, кручение).

Составление условий прочности в этих случаях не вызывало затруднений. Для обеспечения прочности материала требовалось, чтобы наибольшее нормальное напряжение (при растяжении, сжатии) или наибольшее касательное напряжение (при кручении) не превосходило соответствующего допускаемого напряжения, значение которого установлено по полученному опытным путем соответствующему пределу текучести или пределу прочности (для хрупких материалов).

В дальнейшем при изучении более сложных деформаций, таких, например, как кручение с изгибом и др., встречаются более сложные случаи напряженного состояния.

На рис. VIII.1 изображен общий случай трехосного напряженного состояния. Там же показана площадка действия максимального касательного напряжения. Напомним, что ранее было принято следующее правило обозначения главных напряжений: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (с учетом знака).

Спрашивается: при каких значениях напряжений σ_{1u} , σ_{2u} , σ_{3u} наступит предельное состояние материала, т. е. произойдет его разрушение или возникнут пластические деформации?

Решение этого вопроса позволило бы решить и другую задачу: определить безопасные (допускаемые) значения главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 .

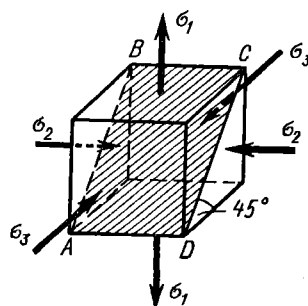


Рис. VIII.1

Поставленная задача является весьма сложной. Наиболее надежный способ ее решения состоял бы в том, чтобы испытать образец при заданном соотношении главных напряжений до разрушения или до начала текучести и установить таким образом предельные, а затем допускаемые значения главных напряжений.

Однако этот способ приходится отвергнуть, так как при каждой новой комбинации напряжений пришлось бы снова производить испытания.

Кроме того, такие испытания требуют очень сложных машин и приборов. Необходимо поэтому иметь какую-то гипотезу (теорию), которая позволила бы оценивать опасность перехода материала в предельное состояние при сложном напряженном состоянии, не прибегая каждый раз к трудоемким опытам, а используя лишь данные наиболее простых опытов, т. е. опытов с одноосным напряженным состоянием.

Таким образом, построение гипотез прочности основывается на предположении, состоящей в том, что два каких-либо напряженных состояния считаются равноопасными и равнопрочными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся предельными.

В этом случае коэффициент запаса прочности для обоих напряженных состояний при указанных условиях будет одинаковым.

Гипотез прочности предложено несколько, и исследования в этой области продолжаются. Это объясняется сложностью природы разрушения. С физической точки зрения, разрушение материала представляет собой или отрыв частиц друг от друга (так называемое хрупкое разрушение), или сдвиг частиц (так называемое вязкое разрушение, сопровождающееся значительными пластическими деформациями).

Однако трудность вопроса состоит в том, что один и тот же материал при различных напряженных состояниях и различных условиях испытания (температура окружающей среды, скорость деформирования и т. д.) может разрушаться и хрупко, и вязко. Кроме того, в некоторых случаях возможно комбинированное разрушение, когда в одних зонах разрушение происходит в результате отрыва частиц, а в других — в результате сдвига. Это свидетельствует о том, что характер предельного состояния материала и условия его перехода в предельное состояние зависят от многих факторов.

Естественно принять в качестве таких факторов напряжения (нормальные и касательные) и деформации (линейные и угловые). Было предложено также принять в качестве критерия перехода в предельное состояние потенциальную энергию де-

формации. Идея рассматриваемых далее гипотез прочности и состоит в том, что каждая из них из большого числа факторов, влияющих на прочность материала, выбирает какой-нибудь один, игнорируя все остальные (подчеркиваем, что здесь и в дальнейшем, говоря о прочности, имеем в виду как разрушение в буквальном смысле слова, так и возникновение пластических деформаций).

По мере накопления опытных данных стала очевидной необходимость применения более сложных гипотез прочности, основывающихся не только на опытах с одноосным растяжением (сжатием), но и на опытах при сложном напряженном состоянии.

Надежность той или иной гипотезы прочности проверяется опытным путем. Поэтому, прежде чем переходить к изложению гипотез прочности, ознакомимся с результатами некоторых опытов, проведенных при двухосном напряженном состоянии.

Двухосные напряженные состояния с различным соотношением главных напряжений получаются сравнительно просто при испытании тонкостенных трубок, подверженных внутреннему давлению и действию осевой силы.

Результаты опытов будем изображать графически (рис. VIII.2), строя диаграмму зависимости между значениями главных напряжений к моменту разрушения или к моменту начала текучести материала (короче, диаграмму зависимости между предельными значениями главных напряжений).

Тогда при одноосном растяжении предельное напряжение изобразится отрезком OF (если элемент, показанный на чертеже, растягивается в вертикальном направлении) или OA (в случае растяжения элемента в горизонтальном направлении), причем для изотропных материалов $OF = OA$. Эти отрезки в определенном масштабе равны пределу прочности или пределу текучести при одноосном растяжении в зависимости от того, какое предельное состояние мы рассматриваем*.

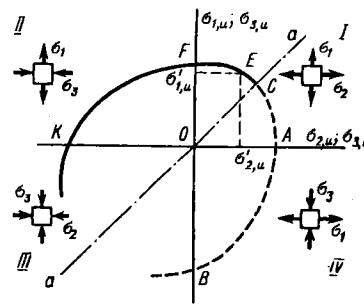


Рис. VIII.2

* При построении рассматриваемой диаграммы правило обозначения главных напряжений частично нарушается. Так, например, для I квадранта абсциссы точек при любом двухосном растяжении равны

При одноосном сжатии предельное напряжение изобразится отрезком OB или OK .

Испытаем теперь образец при каком-нибудь двухосном напряженном состоянии, например при таком, чтобы напряжение σ_1 , увеличиваясь, все время было в два раза больше напряжения σ_2 . При каких-то значениях этих напряжений, например σ'_{1a} и σ'_{2a} , произойдет разрушение или наступит текучесть материала. Нанесем на диаграмму точку E , координаты которой равны σ'_{1a} и σ'_{2a} . Проведем опыты при других соотношениях между главными напряжениями, нанеся на диаграмму соответствующие точки и соединив их между собой, получим некоторую линию $KFCAB$, которую назовем **диаграммой предельных напряжений**. Очевидно, что для изотропных материалов линия aa есть ось симметрии этой диаграммы, так что достаточно построить одну половину диаграммы предельных напряжений: $CEFK$ или CAB .

Точки, расположенные в I четверти (квадранте) диаграммы, будут характеризовать двухосное растяжение ($\sigma_3=0$; $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$); точки, расположенные во II и IV квадрантах, — двухосное растяжение — сжатие ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_2=0$; $\sigma_3 < 0$); точки, расположенные в III квадранте, — двухосное сжатие ($\sigma_2 < 0$; $\sigma_3 < 0$; $\sigma_1=0$).

На рис. VIII.3 представлена диаграмма предельных напряжений для хрупкого материала — серого чугуна, полученная Грасси и Корне. Химический состав чугуна: C — 3,48 %, Si — 2,21 %, Mn — 0,52 %. Испытывались чугунные трубки, имевшие наружный диаметр 14 мм и толщину стенок 0,75 мм. Трубки подвергались одновременному действию осевой нагрузки и внутреннего давления.

Из диаграммы видно, что в I квадранте разрушение происходит при практически постоянном растягивающем напряжении 190 МПа. В IV квадранте, до тех пор пока второе — теперь сжимающее напряжение — не превосходит 200 МПа, сохраняется постоянство растягивающего напряжения — 190 МПа. Далее растягивающее напряжение начинает уменьшаться, а сжимающее растет, достигая 630 МПа (предела прочности при одноосном сжатии); III квадрант не обследован.

На рис. VIII.4 представлена диаграмма предельных напряжений, полученная Коффиным для серого чугуна.

предельному значению главного напряжения, действующего горизонтально и обозначенного σ_2 (см. в I квадранте изображение растягиваемого элемента), хотя для точек, лежащих ниже пунктирной прямой OC , $\sigma_2 > \sigma_1$, т. е. при строгом соблюдении правила обозначений следовало бы горизонтально действующее напряжение считать первым.

Для I и II квадрантов данные близки к результатам, показанным на рис. VIII.3.

Интерес представляют редкие данные для III квадранта напряжений (сжатие — сжатие).

На рис. VIII.5 представлены диаграммы предельных напряжений для других очень хрупких материалов: стекла (рис. VIII.5, а) и гипса (рис. VIII.5, б). Диаграммы получены в опытах акад. Н. Н. Давиденкова.

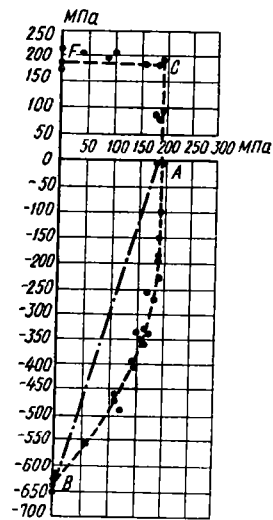


Рис. VIII.3

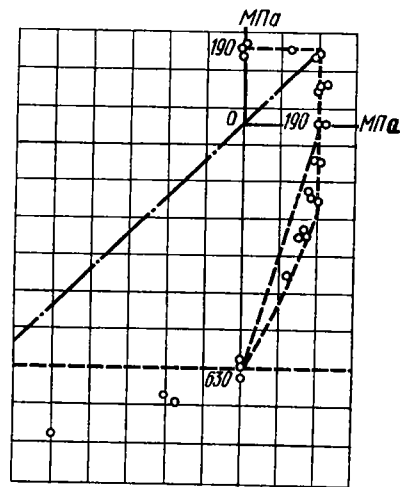


Рис. VIII.4

Стекланные образцы изготовлялись в виде трубок с внутренним диаметром 35 мм, толщиной стенок 1 мм и длиной 220 мм. Гипсовые образцы отливались из медицинского гипса также в виде трубок с внутренним диаметром 39,5 мм и толщиной стенок 3 мм. Для стекла промежуточных точек между $\sigma_3 = -300$ МПа и $\sigma_3 = -875$ МПа из-за недостаточной мощности установки получить не удалось.

На рис. VIII.5, а видно, что для стекла до $\sigma_3 = -300$ МПа решающая роль принадлежит растягивающему напряжению $\sigma_1 = +40$ МПа. Для гипса до напряжения $\sigma_3 = -12$ МПа решающая роль также принадлежит растягивающему напряжению $\sigma_1 = +4$ МПа. III квадрант (т. е. случай двухосного сжатия) не обследован.

На рис. VIII.6 приведены результаты опытов для стали и меди, относящиеся к группе пластичных материалов.

Здесь по осям координат отложены не абсолютные значения предельных напряжений, а их отношение к пределу текучести при одноосном растяжении (сжатии). Из этой диаграммы видно, что опытные точки располагаются на некоторой кривой *СКADB*. Это свидетельствует о том, что в отличие от предыдущих диаграмм здесь ни одно из напряжений не играет доминирующей роли.

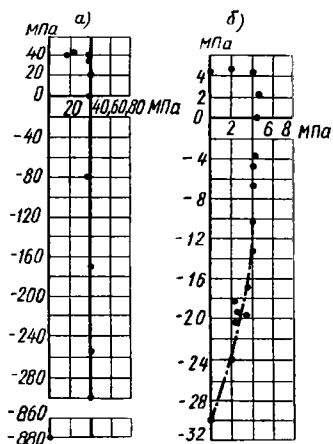


Рис. VIII.5

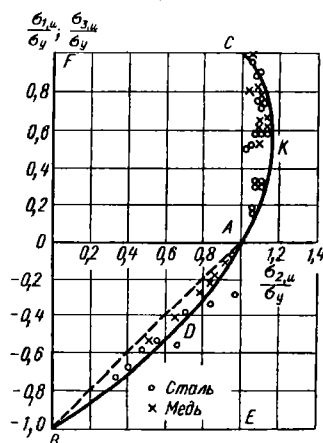


Рис. VIII.6

Для трехосного напряженного состояния опытных данных значительно меньше, чем для плоского напряженного состояния. Опыты проведены лишь для некоторого ограниченного числа комбинаций главных напряжений.

Перейдем теперь к изложению имеющихся основных гипотез прочности.

Некоторые из них подтверждаются опытами или как гипотезы пластичности, или как гипотезы разрушения. Другие же подтверждаются одновременно и как гипотезы разрушения, и как гипотезы пластичности.

§ 69. ПЕРВАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

Первая гипотеза прочности называется также **гипотезой наибольших нормальных напряжений**, потому что за критерий прочности она принимает наибольшее нормальное напряжение. Сформулирована она может быть следующим образом:

предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее нормальное на-

пряжение достигает значения предельного напряжения при одноосном напряженном состоянии:

$$\sigma_{1u} = \sigma_u \quad (\text{VIII.1})$$

где σ_{1u} — предельное значение наибольшего (из трех) нормального напряжения (в момент разрушения); σ_u — предельное напряжение при одноосном сжатии или растяжении (предел прочности).

Диаграмма предельных напряжений по первой гипотезе изображена на рис. VIII.7, а в виде прямых 12, 23, 34 и 14. При

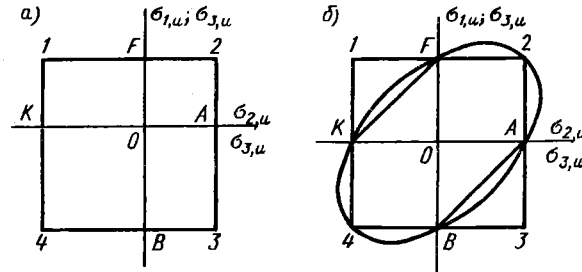


Рис. VIII.7

этом отрезки $OA = OF$ представляют собой предельное напряжение при одноосном растяжении, отрезки $OB = OK$ — предельное напряжение при одноосном сжатии. Для хрупких материалов $OB > OF$; для пластичных материалов $OB = OF$ (рис. VIII.7, б). Разделив обе части равенства (VIII.1) на коэффициент запаса прочности и добавляя знак неравенства, получим условие прочности

$$\sigma_1 \leq \sigma_{adm} \quad (\text{VIII.2})$$

где σ_1 — фактическое значение наибольшего главного напряжения, возникающего в опасной точке детали; σ_{adm} — допускаемое значение нормального напряжения, принимаемое для одноосного растяжения или сжатия.

Имея в виду выражение (VIII.2), первую гипотезу прочности можно сформулировать также следующим образом:

прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается, если наибольшее нормальное напряжение не превосходит допускаемого нормального напряжения, установленного для одноосного напряженного состояния.

Как видим, эта гипотеза учитывает лишь влияние наибольшего главного напряжения, пренебрегая влиянием двух других главных напряжений на прочность материала. Рассмотренные

выше опыты для пластичных материалов не подтверждают этой гипотезы как гипотезы пластичности, т. е. гипотезы, устанавливающей критерий возникновения текучести (см. рис. VIII.6). Опытные точки располагаются не на прямых FC , CE и BE , как это следует из первой гипотезы, а на некоторой кривой линии $CKADB$.

Для хрупких материалов в I квадранте диаграммы предельных напряжений и в значительной части IV (или II) квадранта первая гипотеза хорошо согласуется с опытными данными (см. рис. VIII.3, VIII.4 и VIII.5). В этих случаях ею и следует пользоваться, рассматривая ее как гипотезу, устанавливающую критерий хрупкого разрушения.

Если материал имеет различные допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, то вместо одного условия прочности (VIII.2) будем иметь два условия — по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\max \sigma_t \leq \sigma_{adm}^t; \quad (\text{VIII.2a})$$

$$\max \sigma_c \leq \sigma_{adm}^c. \quad (\text{VIII.2б})$$

§ 70. ВТОРАЯ И ТРЕТЬЯ ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Согласно второй гипотезе прочности, называемой также гипотезой наибольших линейных деформаций, в качестве критерия прочности принимается наибольшая линейная деформация.

Поскольку опыты не подтверждают эту теорию, не будем излагать ее подробно и перейдем к изложению широко применяющейся в настоящее время третьей гипотезы.

Согласно третьей гипотезе прочности, называемой также гипотезой наибольших касательных напряжений,

прочность материала при сложном напряженном состоянии считается обеспеченной, если наибольшее касательное напряжение не превосходит допускаемого касательного напряжения, установленного для одноосного напряженного состояния:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm}. \quad (\text{VIII.3})$$

В § 15 было показано, что при двухосном напряженном состоянии наибольшие касательные напряжения имеют место в сечениях под углом $\alpha = 45^\circ$ к направлению главных напряжений и равны полуразности этих напряжений.

В случае объемного напряженного состояния максимальные касательные напряжения имеют место в плоскости $ABCD$ (см. рис. VIII.1):

$$\tau'_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2.$$

Допускаемое касательное напряжение τ_{adm} при одноосном напряженном состоянии связано с допускаемым нормальным напряжением σ_{adm} соотношением $\tau_{adm} = 1/2\sigma_{adm}$, вытекающим из предыдущей формулы, если положить в ней σ_3 равным нулю.

Таким образом, условие прочности по третьей гипотезе, выраженное в нормальных напряжениях, имеет вид

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}. \quad (\text{VIII.4})$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (VIII.4), представляет собой некоторое напряжение, называемое **приведенным** или **эквивалентным (расчетным)**.

Его следует понимать как **напряжение, которое следует создать в растянутом (или сжатом) образце, чтобы его прочность была одинаковой с прочностью образца, находящегося в условиях сложного напряженного состояния.**

Чтобы сравнить эту гипотезу с опытными данными, напомним по третьей гипотезе также условие перехода материала в предельное состояние:

$$\sigma_{1u} - \sigma_{3u} = \sigma_u, \quad (\text{VIII.5})$$

где σ_{1u} и σ_{3u} — значения главных напряжений в предельном состоянии; σ_u — предельное напряжение одноосного сжатия или растяжения.

Изобразим условие (VIII.5) на диаграмме предельных напряжений. При двухосном растяжении наименьшее напряжение σ_3 равно нулю, поэтому в I и III квадрантах третья гипотеза совпадает с первой — линии $F2$, $2A$; $K4$ и $4B$ (рис. VIII.7, б).

Во II квадранте уравнение (VIII.5) представляет собой уравнение наклонной (под углом 45°) линии KF (рис. VIII.7, б). В IV квадранте линии KF соответствует линия AB .

Сравнивая диаграмму предельных напряжений по третьей гипотезе (прямые CA и AB на рис. VIII.6) с результатами опытов для пластичных материалов, видим, что третья гипотеза в общем удовлетворительно характеризует сопротивление этих материалов пластическим деформациям, во всяком случае значительно правильнее, чем первая гипотеза (линии CE и BE).

Для случая чистого сдвига (кручения), когда $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$, по формуле (VIII.5) получаем

$$2\tau_y = \sigma_y \quad \text{или} \quad \tau_y = 0,5\sigma_y,$$

где τ_y — предел текучести при чистом сдвиге; σ_y — предел текучести при одноосном растяжении (сжатии).

Опыты для большинства сталей дают значение $\tau_y \approx 0,6\sigma_y$.

Недостатком третьей гипотезы является то, что она не учи-

тывает влияния промежуточного главного напряжения σ_2 на прочность материала.

В настоящее время третья гипотеза прочности широко применяется для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

§ 71. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Согласно первой из энергетических гипотез — гипотезе Бельтрами, прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается в том случае, если удельная потенциальная энергия деформации не превосходит допускаемой удельной потенциальной энергии, установленной для одноосного напряженного состояния:

$$u \leq u_{adm}. \quad (\text{VIII.6})$$

Удельная потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии равна (см. § 18)

$$u = 0,5E [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (\text{VIII.7})$$

Эта величина всегда положительна. Поэтому энергетическая гипотеза, так же как и третья, не учитывает различия между растяжением и сжатием, другими словами, пользуясь этой гипотезой, приходится принимать

$$\sigma'_{adm} = \sigma^c_{adm} = \sigma_{adm}.$$

Допускаемая удельная потенциальная энергия при одноосном напряженном состоянии при $\sigma_1 = \sigma_{adm}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ определяется по той же формуле (VIII.7):

$$u_{adm} = \sigma_{adm}^2 / (2E). \quad (\text{VIII.8})$$

Подставив значения u из формулы (VIII.7) и u_{adm} из формулы (VIII.8) в формулу (VIII.6), получим

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_{adm}^2$$

или

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{adm}. \quad (\text{VIII.9})$$

Опыты показывают, что лучшие результаты получаются, если в качестве критерия прочности принимать не всю энергию деформации, а лишь ту ее часть, которая связана с изменением формы тела.

Это условие проще всего записать, полагая в формуле (VIII.9) $\nu=0,5$, так как при этом значении ν объем тела не изменяется (см. § 17).

Следовательно, условие прочности (в данном случае это условие пластичности) по энергетической гипотезе формоизменения (называемой также *четвертой гипотезой* или гипотезой Губера — Мизеса) имеет вид

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_{adm}. \quad (\text{VIII.10})$$

В частном случае для плоского напряженного состояния ($\sigma_3=0$) получим

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_{adm}. \quad (\text{VIII.11})$$

Для сопоставления с опытными данными напомним предельное условие по этой гипотезе для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 - \sigma_{1u}\sigma_{2u} = \sigma_u^2, \quad (\text{VIII.12})$$

где σ_{1u} и σ_{2u} — предельные значения главных напряжений; σ_u — предельное значение напряжения при одноосном растяжении (сжатии).

Этому уравнению на диаграмме предельных напряжений соответствует эллипс (рис. VIII.7, б). Сравнивая условие пластичности по четвертой гипотезе (линия *CKADB* на рис. VIII.6) с опытными данными, обнаруживаем очень хорошее совпадение. Для случая чистого сдвига из (VIII.12) получим $3\tau_y^2 = \sigma_y^2$, откуда $\tau_y \approx 0,58\sigma_y$, что близко совпадает с опытными данными.

Для хрупких материалов результаты по четвертой гипотезе получаются неудовлетворительными.

§ 72. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ДРУГИХ ГИПОТЕЗАХ ПРОЧНОСТИ

Рассмотренные выше гипотезы прочности дают удовлетворительные результаты или только для хрупкого разрушения (первая гипотеза), или только для вязкого (третья или четвертая). Кроме того, они не учитывают различной прочности материалов на растяжение и сжатие.

Кроме рассмотренных было предложено большое количество других гипотез. Некоторые из них заслуживают внимания, хотя и не могут быть подробно рассмотрены в настоящем кратком курсе. Здесь прежде всего необходимо отметить гипотезу прочности О. Мора, позволяющую учесть различное сопротивление

материалов растяжению и сжатию. Условие прочности, по гипотезе Мора, имеет вид

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq \sigma_{adm}^t \quad (\text{VIII.13})$$

где $m = \sigma_{u,t}/\sigma_{u,c}$; $\sigma_{u,t}$ — предельное напряжение при растяжении; $\sigma_{u,c}$ — предельное напряжение при сжатии.

Для пластичных материалов предельные напряжения равны соответствующим пределам текучести, т. е. $\sigma_{u,t} = \sigma_{y,t}$; $\sigma_{u,c} = \sigma_{y,c}$.

Для хрупких материалов предельные напряжения равны пределам прочности.

Таким образом, гипотеза Мора может рассматриваться и как гипотеза пластичности, и как гипотеза разрушения.

При $m=1$ гипотеза прочности Мора совпадает с третьей гипотезой. На диаграмме предельных напряжений гипотеза Мора в I квадранте совпадает с первой и третьей гипотезами прочности (линии FC и CA на рис. VIII.3), а в IV квадранте дает зависимость между предельными значениями напряжений σ_{1u} и σ_{3u} в виде прямой AB . Как видим, для хрупких материалов гипотеза Мора дает удовлетворительные результаты, хотя и приводит к завышенным размерам сечений. Наилучшие результаты дает теория Мора при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$.

Заслуживает также внимания обобщение энергетической гипотезы прочности, предложенное П. П. Баландиным и позволяющее учесть различную прочность материала на растяжение и сжатие. Условие прочности, по П. П. Баландину, имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{red} = & \frac{1-m}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{(1-m)^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + 4m [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]} \leq \\ & \leq \sigma_{adm}^t \end{aligned}$$

где $m = \sigma_{u,t}/\sigma_{u,c}$.

Для двухосного напряженного состояния при $\sigma_3 = 0$ получается

$$\begin{aligned} \sigma_{red} = & \frac{1-m}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{(1-m)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4m (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)} \leq \sigma_{adm}^t \end{aligned}$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, т. е. при $m = 1$, гипотеза Баландина совпадает с четвертой гипотезой прочности.

Опыты показывают, что гипотеза Баландина в определенном диапазоне напряженных состояний дает удовлетворительные результаты. Так, для чугуна она может применяться во второй части IV квадранта напряжений (см. рис. VIII.3), начиная с того момента, когда сжимающее напряжение становится равным растягивающему, а также, по-видимому, в III квадранте (хотя экспериментальных данных для III квадранта еще недостаточно).

Заслуживают внимания предложенные в последнее время так называемые **объединенные гипотезы прочности**, где в качестве критерия прочности принимается не один фактор, а два или даже три. Проф. Я. Б. Фридрих предложил объединить вторую и третью гипотезы прочности. Акад. Н. Н. Давиденков на основании описанных выше опытов с чугуном, стеклом и гипсом предложил объединить первую гипотезу и гипотезу П. П. Баландина.

Например, для чугуна первая гипотеза должна применяться для I квадранта напряжений и в первой части IV квадранта, пока сжимающее напряжение не превосходит по своему значению растягивающего.

В остальной части IV (или II) квадранта, а также в III квадранте напряжений акад. Н. Н. Давиденков считает применимой гипотезу прочности П. П. Баландина.

Предлагались и другие гипотезы прочности. Проф. М. М. Филоненко-Бородич предложил записывать условие прочности в виде некоторого многочлена второй или даже третьей степени относительно главных напряжений, содержащего определенное число произвольных постоянных, которые определяются из опытов, в том числе и из опытов при сложном напряженном состоянии. Однако приведенные выше диаграммы разрушения хрупких материалов ясно показывают, что условие прочности материала не может быть выражено одной замкнутой функцией во всем диапазоне напряженных состояний.

Для хрупких материалов наиболее оправданной является, по-видимому, объединенная гипотеза прочности Н. Н. Давиденкова.

Мы рассматривали гипотезы прочности, опираясь на данные опытов с двухосным напряженным состоянием. Опытных данных, относящихся к трехосным напряженным состояниям, значительно меньше. Имеющиеся опыты свидетельствуют о том, что при напряженных состояниях, близких к трехосному сжатию, материалы, даже хрупкие, способны выдерживать весьма значи-

тельные напряжения. При равностороннем сжатии таких материалов, как сталь, медь, алюминий, разрушения не происходит при громадных давлениях 5000—20 000 МПа.

На основании имеющихся опытных данных можно считать, что для пластичных материалов при трехосном напряженном состоянии удовлетворительные результаты дают энергетическая гипотеза формоизменения и третья гипотеза прочности. Что же касается хрупких материалов, то для них рекомендуется гипотеза прочности Мора или Н. Н. Давиденкова.

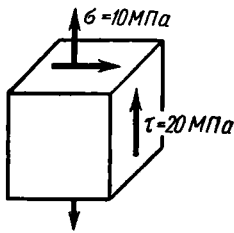


Рис. VIII.8

Пример VIII.1. Проверить прочность материала (сталь 20), испытывающего трехосное сжатие $\sigma_3 = -500$ МПа, $\sigma_2 = -400$ МПа, $\sigma_1 = -400$ МПа, $\sigma_{adm}^t = 160$ МПа.

Решение По энергетической гипотезе формоизменения эквивалентное напряжение равно [см. формулу (VIII.10)]:

$$\begin{aligned}\sigma_{red} &= \sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_2\sigma_1 - \sigma_2\sigma_3} = \\ &= \sqrt{500^2 + 400^2 + 400^2 - 500 \cdot 400 - 400 \cdot 400 - 400 \cdot 500} = \\ &= 100 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Интересно отметить, что по первой гипотезе прочности, которая в данном случае неприменима, получили бы $\sigma_{red} = 500$ МПа, т. е. значительно больше.

Пример VIII.2. Проверить прочность чугуновой детали, напряженное состояние в опасной точке которой изображено на рис. VIII.8. Допускаемое напряжение равно $\sigma_{adm}^t = 35$ МПа, $m = 0,29$.

Решение. Так как напряженное состояние задано не в главных напряжениях, то вычисляем предварительно главные напряжения, используя формулы § 16:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma/2 + 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \\ &= 10/2 + 0,5 \sqrt{10^2 + 4 \cdot 20^2} = 5 + 20,6 = 25,6 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= \sigma/2 - 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 5 - 20,6 = -15,6 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Так как растягивающее напряжение по абсолютному значению превосходит сжимающее, то согласно объединенной гипотезе прочности Н. Н. Давиденкова для этого напряженного состояния следует применить гипотезу наибольших нормальных напряжений

$$\sigma_{red} = 25,6 \text{ МПа} < 35 \text{ МПа}.$$

По гипотезе Мора получили бы $\sigma_{red} = 25,6 - 0,29 \cdot (-15,6) = 30,1 < 35$ МПа, т. е. более осторожную оценку.

Пример VIII.3. Вычислить коэффициент запаса прочности для детали из чугуна, если в опасной точке главные напряжения равны: $\sigma_1 = 25$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -50$ МПа. Предел прочности чугуна при растяжении $\sigma_{u,t} = 160$ МПа, при сжатии $\sigma_{u,c} = 550$ МПа, $m = 0,29$.

Решение. Так как сжимающее напряжение превосходит по значению растягивающее, то эквивалентное напряжение вычисляем по гипотезе прочности П. П. Баландина:

$$\begin{aligned} \sigma_{red} &= \frac{1-m}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{(1-m)^2 (\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4m (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3)} = \\ &= \frac{1-0,29}{2} (25-50) + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{(1-0,29)^2 (25-50)^2 + 4 \cdot 0,29 (25^2 + 50^2 + 25 \cdot 50)} = 27,65 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Коэффициент запаса прочности $n = 160/27,65 = 5,8$.

Для сравнения вычислим коэффициент запаса прочности по гипотезе О. Мора:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - m \sigma_3 = 25 + 0,29 \cdot 50 = 39,5 \text{ МПа}; \quad n = 160/39,5 = 4,06,$$

т. е. снова более осторожная оценка.

Таким образом, применение объединенных гипотез прочности позволило бы более экономно назначать размеры деталей, которые изготавливают из хрупких материалов.

Однако, учитывая недостаточный объем экспериментальных данных по изучению прочности материалов в условиях сложного напряженного состояния, рекомендуется пользоваться гипотезой Мора или гипотезой Н. Н. Давиденкова.

Пример VIII.4. Оценить возможность появления пластических деформаций при контакте шара и плиты из стали 30, если максимальное контактное напряжение составляет $\sigma_{max} = 1200$ МПа, т. е. равно допускаемому контактному напряжению (см. табл. II.6).

Решение. Используя третью гипотезу пластичности, записываем условие перехода материала в пластическое состояние:

$$\tau_{max} = \tau_y = \sigma_y/2 = 300/2 = 150 \text{ МПа,}$$

где $\tau_y = 150$ МПа — предел текучести для стали 30 при касательных напряжениях.

Для точек, расположенных в глубине плиты, имеем по формуле (II.64) $\tau_{max} = 0,31 \sigma_{max} = 0,31 \cdot 1200 = 372$ МПа.

Поскольку $\tau_{max} > 150$ МПа, приходим к выводу, что при данном значении контактного напряжения неизбежны пластические деформации, особенно в глубине плиты, которые могут быть допущены только при действии статической нагрузки.

ГЛАВА IX
**ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИЯ СИЛ НА СТЕРЖЕНЬ
(СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ)**

§ 73. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Мы изучили четыре вида простого нагружения стержня: центральное растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и плоский изгиб.

Во всех этих случаях в поперечных сечениях стержня под действием нагрузки возникло только одно внутреннее усилие (продольная или поперечная сила, крутящий или изгибающий момент). Исключением явился лишь общий случай плоского изгиба (поперечный изгиб), при котором в поперечных сечениях стержня возникают одновременно два внутренних усилия: изгибающий момент и поперечная сила. Но и в этом случае при расчетах на прочность и жесткость, как правило, учитывалось лишь одно внутреннее усилие — обычно изгибающий момент.

Однако на практике часто встречаются и более сложные случаи, когда в поперечных сечениях стержня действует несколько внутренних силовых факторов (внутренних усилий), одновременно учитываемых при расчете на прочность, например продольная сила и крутящий момент, либо сочетание из трех (и более) внутренних усилий. Эти случаи называют **сложным сопротивлением**.

Порядок решения таких задач следующий.

Вначале с помощью метода сечений определяют внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержня.

При сложной нагрузке рекомендуется строить эпюры внутренних усилий, позволяющие определить положение опасного сечения*. После этого на основании принципа независимости действия сил определяют нормальные и касательные напряже-

* В некоторых случаях по эпюрам внутренних усилий не представляется возможным с полной уверенностью установить, какое сечение является опасным, при этом по эпюрам устанавливают два (а иногда и более) предположительно опасных сечения и для каждого из них производят расчет.

ния от каждого внутреннего усилия отдельно, пользуясь полученными в предыдущих главах формулами. Исследуя распределение напряжений по сечению, устанавливают опасную (или предположительно опасную) точку, для которой и составляют условие прочности. При этом если окажется, что в опасной точке имеет место одноосное напряженное состояние (одноосное растяжение и сжатие), то для расчета на прочность достаточно сопоставить возникающее в этой точке суммарное (т. е. от всех внутренних усилий) нормальное напряжение с допускаемым растягивающим или сжимающим. В случае же, если напряженное состояние в опасной точке является двухосным*, расчет следует выполнять, применяя ту или иную гипотезу прочности. Как известно из предыдущего, выбор гипотезы прочности определяется в первую очередь состоянием материала (пластическое или хрупкое).

При необходимости определения того или иного перемещения также используется принцип независимости действия сил (складывают перемещения геометрически).

§ 74. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЯ С ЛОМАННОЙ ОСЬЮ

Рассмотрим пример построения эпюр крутящих и изгибающих моментов, а также продольных сил для стержня с ломаной осью, изображенного на рис. IX.1, а. Там же показана система координат.

Изгибающий момент в любом сечении стержня определяем как алгебраическую сумму моментов (относительно соответствующей оси) внешних сил, действующих по одну сторону от сечения. Чтобы не определять предварительно реакций в заделке, рекомендуется брать сумму моментов сил, действующих со стороны свободного конца стержня.

Изгибающий момент в произвольном сечении участка AB $M_{S_1} = F_s^{**}$ (рис. IX.1, б). По этому уравнению с правой стороны стержня (на сжатом волокне) построена эпюра M для участка AB .

Для определения изгибающих моментов в сечениях участка BC полезно мысленно перенести силу F параллельно самой себе из точки A в точку B . При переносе сил надо добавить

* При расчете бруса (стержня) случаи трехосного напряженного состояния не встречаются.

** Расстояния от одного из концов данного участка стержня до рассматриваемого сечения обозначаем соответственно s_1, s_2, s_3 .

момент, лежащий в плоскости чертежа, т. е. в плоскости ZOY , и равный $M_{yz} = Fl_1$. Так как плоскость действия этого момента перпендикулярна оси участка BC стержня, то он вызывает кручение стержня, а изгиб производит сила F . Поэтому изгибающий момент в сечении с абсциссой s_2 равен $M_{S_2} = Fs_2$.

Сжатые волокна на участке BC будут справа, здесь и построена эпюра M_{S_2} с наибольшей ординатой Fl_2 . Аналогичным

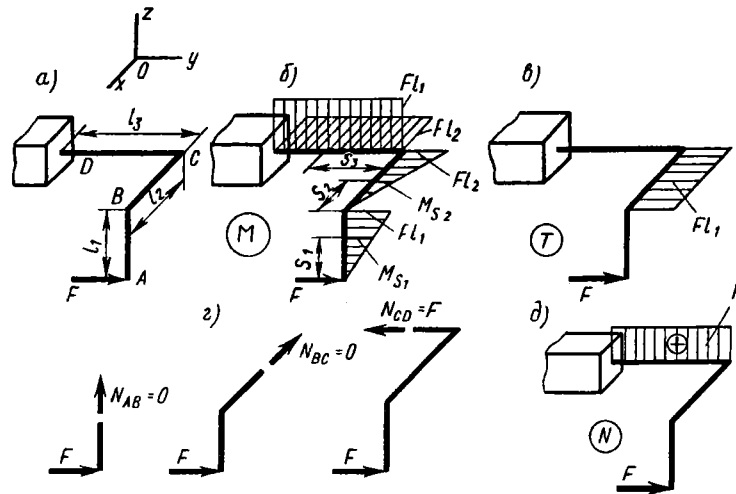


Рис. IX.1

образом строится эпюра изгибающих моментов для участка CD . Для этого силу F и момент $M_{yz} = Fl_1$ из точки B мысленно переносим в точку C .

В точке C будут действовать сила F , направленная вдоль участка CD , и два момента: один момент $M_{yz} = Fl_1$, который переносится без изменения, и второй момент $M_{xy} = Fl_2$, который получается при переносе силы F из точки B в точку C .

Оба эти момента M_{yz} и M_{xy} (на чертеже они не показаны) вызывают изгиб стержня: первый — в вертикальной плоскости, второй — в горизонтальной.

Соответствующие эпюры изгибающих моментов для участка CD представлены на рис. IX.1, б. Эпюры построены со стороны сжатых волокон рассматриваемого участка.

Построим эпюру крутящих моментов. Стержень на участке AB не испытывает кручения, так как сила F лежит в той же плоскости, что и продольная ось участка AB .

Крутящий момент в сечениях участка BC : $T = M_{yz} = Fl_1$.

Эпюру T можно строить с любой стороны стержня (рис. IX.1, в).

Участок CD не испытывает кручения, так как сила F параллельна его оси.

Строим эпюру продольных сил. Из условия равновесия отсеченных частей, проецируя силы на направления осей отдельных участков стержня, получаем (рис. IX.1, з):

$$N_{AB}=0; N_{BC}=0; N_{CD}=F \text{ (растяжение).}$$

Эпюра N показана на рис. IX.1, д.

Анализируя эпюры, видим, что: 1) участок AB работает только на изгиб; 2) участок BC работает на кручение и изгиб в горизонтальной плоскости; 3) участок CD работает на изгиб в двух плоскостях и на растяжение.

Соответственно этому должны быть выполнены расчеты на прочность каждого из участков стержня.

§ 75. ИЗГИБ В ДВУХ ПЛОСКОСТЯХ (КОСОЙ ИЗГИБ)

Косой изгиб возникает в том случае, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения (рис. IX.2). В этом случае возникающий в поперечном сечении изгибающий момент можно разложить на два изгибающих момента, действующих в плоскостях, проходящих через главные оси сечения. Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях.

При косом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения будут равны алгебраической сумме напряжений от изгиба в обеих плоскостях.

Рассмотрим, например, точку C опорного сечения, имеющую координаты x и y , относительно главных осей.

В этом сечении:

а) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в вертикальной плоскости с нейтральной осью x ,

$$M_x = F_v l = Fl \sin \varphi; \quad (a)$$

б) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в горизонтальной плоскости с нейтральной осью y ,

$$M_y = F_h l = Fl \cos \varphi. \quad (б)$$

Здесь F_v и F_h — вертикальная и горизонтальная составляющие силы F ; l — длина балки; φ — угол наклона силовой плоскости относительно оси x .

При изгибе в вертикальной плоскости в верхней половине балки (в том числе и в точке C) возникают растягивающие

напряжения, в нижней половине балки — сжимающие, так как выпуклая сторона балки будет наверху.

Напряжения в точке C определяем по следующей формуле, уже известной из теории плоского изгиба:

$$\sigma_1 = M_x y / I_x,$$

где y — расстояние от нейтральной оси x до точки C ; I_x — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси x .

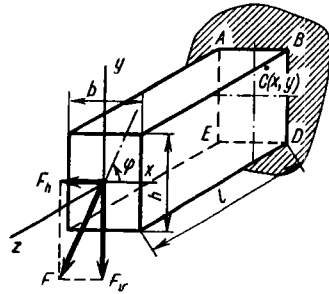


Рис. IX.2

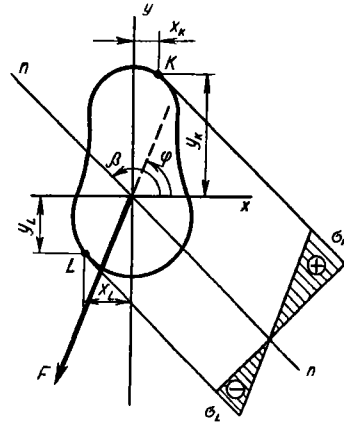


Рис. IX.3

Вследствие изгиба в горизонтальной плоскости в правой половине балки, а следовательно, и в точке C возникают растягивающие напряжения, а в левой половине балки — сжимающие, так как выпуклая сторона балки при изгибе в горизонтальной плоскости будет справа. В этом легко убедиться, изогнув гибкую линейку в горизонтальной плоскости.

Напряжения в точке C при этом будут определяться по аналогичной формуле

$$\sigma_2 = M_y x / I_y,$$

где x — расстояние от оси y (нейтральной оси при изгибе в горизонтальной плоскости) до точки C ; I_y — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси y .

Суммарное напряжение в точке C

$$\sigma = M_x y / I_x + M_y x / I_y. \quad (\text{IX.1})$$

Эта формула справедлива и при любой другой форме сечения балки.

Если сечение имеет выступающие угловые точки, для которых x_{max} и y_{max} достигаются одновременно (прямоугольник,

двугавр), то наибольшие по значению напряжения возникают в этих точках:

$$\sigma = \pm M_x/W_x \pm M_y/W_y, \quad (IX.2)$$

где $W_x = 2I_x/h$ — момент сопротивления сечения относительно оси x ; $W_y = 2I_y/b$ — момент сопротивления сечения относительно оси y .

Очевидно, что опасными будут те угловые точки сечения, где суммируются напряжения одного знака.

Для случая, изображенного на рис. IX.2, такими точками будут точки B и E , при этом точка B находится в растянутой зоне, а точка E — в сжатой. Поэтому напряжения в точках B и E равны:

$$\sigma_B = M_x/W_x + M_y/W_y; \quad \sigma_E = -M_x/W_x - M_y/W_y.$$

Для сечения произвольного очертания, не имеющего выступающих угловых точек, необходимо предварительно найти «опасные» точки, т. е. те точки сечения, в которых будут действовать наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения (рис. IX.3).

Это производится следующим образом. Вначале определяется положение нулевой линии при косом изгибе, т. е. определяется геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю. Другими словами, определяется линия, разделяющая растянутую и сжатую части сечения. Пусть это будет линия mn .

При изгибе напряжения возрастают по мере удаления от нулевой линии.

Это видно из того, что уравнение (IX.1) представляет собой уравнение плоскости, проходящей через нулевую линию. Ордината, замеренная по нормали от поперечного сечения до этой плоскости, численно равна напряжению в данной точке. Она будет наибольшей для той точки, которая дальше всех отстоит от нулевой линии.

Учитывая это, заключаем, что точками, в которых следует проверять напряжения, будут точки, наиболее удаленные от нулевой линии, т. е. точки K и L . При материале, одинаково работающем на растяжение и сжатие, опасной является та из указанных точек, в которой возникает большее (по модулю) напряжение.

Уравнение нулевой линии получим, приравняв правую часть формулы (IX.1) нулю:

$$\begin{aligned} \text{или} \quad & M_x y_0/I_x + M_y x_0/I_y = 0, \\ & M_x (y_0/I_x + K x_0/I_y) = 0, \end{aligned} \quad (IX.3)$$

где в соответствии с формулами (а) и (б)

$$K = M_y/M_x = \operatorname{ctg} \varphi, \quad (\text{IX.4})$$

а x_0 и y_0 — текущие координаты точек нулевой линии.

Так как $M_x \neq 0$, то

$$\boxed{y_0/I_x + Kx_0/I_y = 0.} \quad (\text{IX.5})$$

Это и есть **уравнение нулевой линии**.

Как видим, это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат. Разделив обе части уравнения на x_0 , получим

$$y_0/(x_0 I_x) + K/I_y = 0. \quad (\text{IX.6})$$

Но отношение $y_0/x_0 = \operatorname{tg} \beta$ — тангенс угла наклона нулевой линии к оси x , т. е. ее угловой коэффициент. Следовательно, $\operatorname{tg} \beta/I_x + K/I_y = 0$ или

$$k = \operatorname{tg} \beta = -KI_x/I_y = -I_x/(I_y \operatorname{ctg} \varphi). \quad (\text{IX.7})$$

Как видно из этого уравнения, при $I_x \neq I_y$ угол β не равен углу φ , т. е. нулевая линия не перпендикулярна **силовой линии**, как это имело место при плоском (простом) изгибе. Только в частном случае, когда $I_x = I_y$ (круг, квадрат и т. п.), имеем $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \varphi = -\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg} (\varphi - 90^\circ)$, т. е. $\beta = \varphi - 90^\circ$.

Следовательно, в этом частном случае ($I_x = I_y$) нулевая линия перпендикулярна силовой линии, т. е. имеет место плоский изгиб.

Следует отметить, что нулевая и силовая линии размещаются в смежных квадрантах.

Если, например, силовая линия проходит через I и III квадранты ($0 < \varphi < 90^\circ$), то в соответствии с формулой (IX.7) получим для β значение меньше 90° и притом со знаком минус. Это означает, что угол β следует отложить от оси x по часовой стрелке, т. е. нулевая линия пройдет через IV и II квадранты.

Определив положение нулевой линии и найдя наиболее удаленные от нулевой линии точки поперечного сечения (опасные точки), можно произвести проверку прочности сечения.

Если материал балки по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности следует производить для обеих точек, наиболее удаленных от нулевой линии (точки K и L на рис. IX.3).

В указанном случае, считая, что стержень представляет консоль, как на рис. IX.2, условия прочности запишутся в виде

$$\sigma_K = +M_x y_K/I_x + M_y x_K/I_y \leq \sigma_{adm}' \quad (\text{IX.8})$$

$$\sigma_L = -\frac{M_x}{I_x} y_L - \frac{M_y}{I_y} x_L \leq \sigma_{adm}^c. \quad (IX.9)$$

При равенстве $\sigma_{adm}^t = \sigma_{adm}^c$, т. е. для пластичных материалов, расчет, как уже указывалось, выполняется для одной точки, например в случае, представленном на рис. IX.3, для точки К, так как $\sigma_K > \sigma_L$.

Для сечений типа прямоугольника, двутавра и т. п. условие прочности получим на основании формулы (IX.2):

$$\sigma = M_x/W_x + M_y/W_y \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.10)$$

В случае хрупкого материала, например чугуна, в формулу (IX.10) следует подставить допускаемое напряжение на растяжение σ_{adm}^t .

Определение требуемых размеров поперечного сечения выполняют, используя (в зависимости от формы сечения) формулы (IX.8), (IX.9) или (IX.10), при этом обычно расчет приходится выполнять способом повторных попыток.

Приняв какие-либо размеры сечения, проверяют, удовлетворяются ли условия прочности: формулы (IX.8), (IX.9) или (IX.10). Если расхождение между рабочими и допускаемыми напряжениями значительно, принимают другие размеры сечения и повторяют расчет. Указанные попытки производят до тех пор, пока расхождение между σ_{max} и σ_{adm} не будет превышать 5—10 %. При подборе сечений прокатных балок используют таблицы сортамента.

Подбор круглого сечения производится по формуле простого (плоского) изгиба по суммарному изгибающему моменту

$$M_{tot} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

поскольку для круга нулевая линия перпендикулярна линии действия M_{tot} .

Представляет определенный практический интерес задача о выборе такой формы поперечного сечения, при которой расход материала при косом изгибе будет минимальным. Нетрудно показать (это предлагается сделать учащемуся), что для прямоугольного сечения (см. рис. IX.2) минимальный расход материала (минимальная площадь сечения) получится при условии $h/b = M_x/M_y$.

Однако прямоугольное сечение не является наивыгоднейшим при косом изгибе. Наиболее выгодными являются коробчатые, тонкостенные сечения.

Прогибы при косом изгибе определяются отдельно в каждой плоскости или путем интегрирования дифференциального урав-

нения изогнутой оси, или по универсальному уравнению, или по методу Мора.

Суммарный прогиб определяется как геометрическая сумма составляющих прогибов:

$$v_{tot} = \sqrt{v_h^2 + v_v^2}, \quad (IX.11)$$

где v_h и v_v — прогибы в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

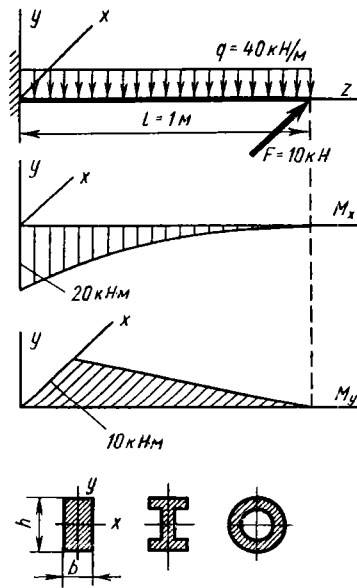


Рис. IX.4

Условие жесткости имеет вид $v_{max} \leq v_{adm}$, где v_{adm} — допускаемый прогиб.

Пример IX.1. Подобрать сечение балки, изгибаемой в двух плоскостях (рис. IX.4). Допускаемое напряжение $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа} = 160 \cdot 10^3 \text{ кПа}$.

Решение. Построим эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, получим наибольшие значения моментов:

$$M_x = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Сравним несколько вариантов поперечных сечений.

1. **Прямоугольное сечение.** Примем оптимальное соотношение

$$h/b = M_x/M_y = 2, \text{ т. е. } h = 2b.$$

Тогда по формуле (IX.10) получим

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \sigma_{adm};$$

$$\sigma = \frac{20 \cdot 6}{b \cdot 4b^2} + \frac{10 \cdot 6}{2b \cdot b^2} = 160 \cdot 10^3 \text{ кПа}.$$

Отсюда $b = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $h = 14,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Площадь поперечного сечения $A_1 = 104 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

2. **Двутавровое сечение.** Принимаем двутавр № 36, у которого $W_x = 743 \text{ см}^3 = 743 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $W_y = 71,1 \text{ см}^3 = 71,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $A = 61,9 \text{ см}^2 = 61,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. По формуле (IX.10),

$$\sigma = \frac{20}{743 \cdot 10^{-6}} + \frac{10}{71,1 \cdot 10^{-6}} = 27 \cdot 10^3 + 140 \cdot 10^3 =$$

$$= 167 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 167 \text{ МПа},$$

что превышает допустимое напряжение на 4,4 % (допустимо).

3. **Кольцевое сечение** с отношением внутреннего диаметра к наружному $c = d/D = 0,9$.

Стержень круглого (сплошного или кольцевого) сечения должен быть рассчитан по формулам простого изгиба по суммарному моменту

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем диаметр сечения

$$\sigma = \frac{22,3}{0,1D^3 (1 - 0,9^4)} = 160 \cdot 10^3 \text{ кПа},$$

откуда $D = 0,016 \text{ м}$, $d = 0,9 \cdot 16 \cdot 10^{-2} = 14,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $A = 37,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Если принять площадь круглого полого сечения за 100 %, то площадь двутавра составит 165 %, а площадь прямоугольного — 276 %.

Из этого примера видно, какие имеются большие возможности сокращения расхода материала благодаря применению рациональных сечений.

Учащемуся предлагается продолжить исследование этого вопроса, рассмотрев коробчатые сечения с различным отношением высоты сечения к его ширине.

§ 76. ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

На рис. IX.5 изображена балка, которая испытывает совместное действие изгиба и центрального растяжения. Поперечная нагрузка, вызывающая изгиб, может быть и более сложной.

Для определения суммарных напряжений используем принцип независимости действия сил. Растягивающие напряжения от силы F_1 во всех точках поперечного сечения, как известно, равны и определяются по формуле

$$\sigma = F_1 / A$$

или в общем случае (при любой осевой нагрузке) — по формуле (II.2):

$$\sigma = N / A,$$

где N — продольная сила в рассматриваемом сечении.

Напряжения от изгиба согласно формуле (IV.8)

$$\sigma = M_x y / I_x.$$

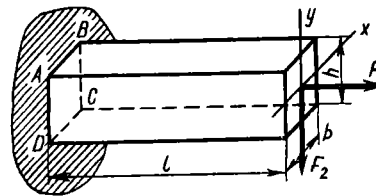


Рис. IX.5

Следовательно, суммарные напряжения в любой точке

$$\sigma = N/A + M_x y / I_x. \quad (IX.12)$$

В данном случае опасным является сечение у заделки, где действует наибольший изгибающий момент, равный $M_{\max} = F_2 l$. В этом сечении наиболее нагруженными точками будут точки, расположенные на линии AB , так как в них суммируются напряжения от растяжения и наибольшие растягивающие напряжения от изгиба $\sigma_{\max} = N/A + M_x / W_x$. В точках линии DC напряжения будут меньше:

$$\sigma = N/A - M_x / W_x.$$

Для стержней, одинаково работающих на растяжение и сжатие, условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = N/A + M_x / W_x \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.13)$$

Если поперечная нагрузка сложная, то для определения опасного сечения и максимального изгибающего момента необходимо предварительно построить эпюру изгибающих моментов.

Полученные соотношения справедливы и при действии сжимающей силы, только напряжение N/A будет отрицательным и наибольшие (по модулю) напряжения будут в точках на линии DC . Необходимо отметить, что при действии сжимающей силы приведенные выше формулы действительны только для стержней большой жесткости, т. е. таких, для которых влияние осевой сжимающей силы на деформацию изгиба незначительно и может не учитываться (см. гл. X).

В случае сочетания растяжения с косым изгибом напряжения определяют по формуле

$$\sigma = N/A + M_x y / I_x + M_y x / I_y. \quad (IX.14)$$

Для стержней из материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие с поперечными сечениями, имеющими угловые точки, равноудаленные от главных осей x и y (типа прямоугольника, двутавра и т. п.), условие прочности имеет вид

$$\sigma = N/A + M_x / W_x + M_y / W_y \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.15)$$

Для стержней, изготовленных из материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие, проверка прочности должна производиться и по растягивающим, и по сжимающим напряжениям.

§ 77. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ)

Весьма часто продольная нагрузка бывает приложена не в центре тяжести поперечного сечения стержня, а с некоторым смещением (эксцентриситетом) относительно главных осей сечения (рис. IX.6, а).

Применив метод сечений, обнаружим в любом поперечном сечении стержня продольную силу $N=F$ и изгибающие моменты, равные относительно оси x $M_x = Fy_f = Ny_f$ и относительно оси y $M_y = Fx_f = Nx_f$.

Поэтому напряжение в любой точке поперечного сечения с координатами x и y определяется, как при осевом растяжении и изгибе в двух плоскостях, т. е. по формуле, аналогичной формуле (IX.14):

$$\sigma = N/A + M_x y / I_x + M_y x / I_y.$$

Для сечений, имеющих выступающие угловые точки, экстремальные напряжения определяют по формуле

$$\sigma = N/A \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y.$$

(IX.16)

где W_x и W_y — моменты сопротивления относительно осей x и y .

В сечении, показанном на рис. IX.6, б, наибольшие напряжения будут в точке E , так как здесь суммируются растягивающие напряжения от центрального растяжения и растягивающие напряжения от изгиба в двух плоскостях:

$$\sigma_E = N/A + M_x / W_x + M_y / W_y. \quad (\text{IX.16a})$$

Наименьшие (в алгебраическом смысле) напряжения будут в точке D :

$$\sigma_D = N/A - M_x / W_x - M_y / W_y.$$

При этом они могут получиться как растягивающими, так и сжимающими.

Условие прочности по растягивающим напряжениям имеет вид

$$\sigma_t = N/A + M_x / W_x + M_y / W_y \leq \sigma_{adm}^t. \quad (\text{IX.17})$$

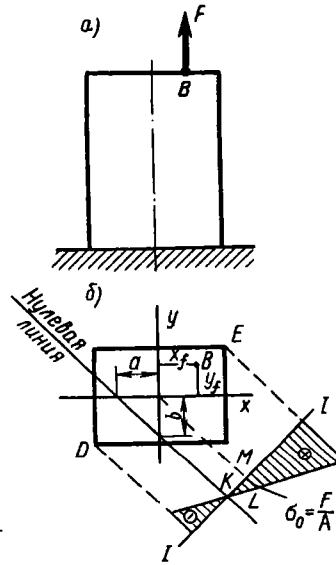


Рис. IX.6

Если точка приложения силы находится на одной из главных осей сечения, например на оси y , то предыдущая формула упрощается:

$$\sigma_t = N/A + M_x/W_x \leq \sigma_{adm}. \quad (\text{IX.18})$$

При произвольной форме поперечного сечения для определения положения опасных точек необходимо найти положение **нулевой линии**. Уравнение нулевой линии получим, приравняв напряжение нулю:

$$N/A + Ny_0y_0/I_x + Nx_0x_0/I_y = 0, \quad (\text{IX.19})$$

где x_0 и y_0 — текущие координаты точек нулевой линии.

Введем обозначения: $i_x^2 = I_x/A$; $i_y^2 = I_y/A$.

Величины $i_x = \sqrt{I_x/A}$, $i_y = \sqrt{I_y/A}$ характеризуют геометрию сечения и называются **радиусами инерции сечения относительно осей x и y** . Размерность радиуса инерции — единица длины, обычно сантиметр. Теперь формулу (IX.19) можно представить в виде

$$\frac{N}{A} \left(1 + \frac{x_0x_0}{i_y^2} + \frac{y_0y_0}{i_x^2} \right) = 0.$$

Так как $N/A \neq 0$, то

$$\boxed{x_0x_0/i_y^2 + y_0y_0/i_x^2 + 1 = 0.} \quad (\text{IX.20})$$

Это и есть уравнение нулевой линии. Его можно представить в виде уравнения прямой в отрезках:

$$x_0/a + y_0/b = 1, \quad (\text{IX.21})$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= -i_y^2/x_0, \\ b &= -i_x^2/y_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.22})$$

представляют собой отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат x и y .

Так как радиус инерции всегда положителен, то величины a и x_0 , а также b и y_0 имеют разные знаки.

Определив положение нулевой линии, легко построить эпюру нормальных напряжений. Для этого проводим линию $I-I$ (ось эпюры) перпендикулярно нулевой линии (рис. IX.6, б). Сносим на эту линию крайние точки сечения D и E , опуская на линию $I-I$ перпендикуляры из точек E и D .

Для построения эпюры напряжений имеем две точки: точку K на нулевой линии, где $\sigma = 0$, и точку L , получающуюся из

условия, что отрезок LM в определенном масштабе должен давать значение напряжения в центре тяжести сечения. Так как в центре тяжести сечения $x=y=0$, то по формуле (IX.15) получаем это напряжение.

$$\sigma_0 = N/A = F/A.$$

Пример IX.2. Определить положение нулевой линии для сечения, показанного на рис. IX.7, если $x_f = 3$ см, $y_f = -2$ см.

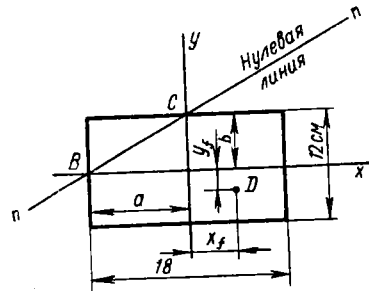


Рис. IX.7

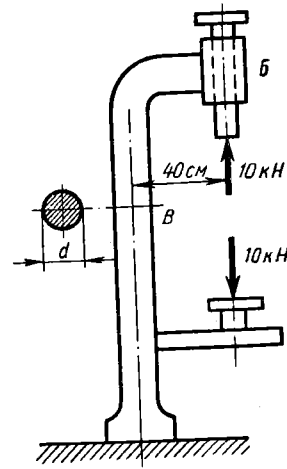


Рис. IX.8

Решение. По формулам (IX.22) определяем отрезки, отсекаемые нулевой линией на главных осях x и y :

$$a = -\frac{i_y^2}{x_f} = -\frac{12 \cdot 18^3 \cdot 10^{-8} / (12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 10^{-4})}{3 \cdot 10^{-2}} = -9 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -9 \text{ см};$$

$$b = -\frac{i_x^2}{y_f} = -\frac{18 \cdot 12^3 \cdot 10^{-8} / (12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 10^{-4})}{-2 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6 \text{ см}.$$

Откладываем эти отрезки и через точки B и C проводим нулевую линию.

Пример IX.3. При сверлении детали на шпindel B сверлильного станка действует осевая сила, равная 10 кН (рис. IX.8). Определить диаметр сплошной чугунной колонны B . Допускаемое напряжение на растяжение $\sigma_{adm}^t = 40 \text{ МПа} = 40 \cdot 10^3 \text{ кПа}$.

Решение. Колонна работает на внецентренное растяжение. По формуле (IX.18) имеем

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_x} \leq \sigma_{adm}^t.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\sigma = \frac{10 \cdot 4}{3,14 \cdot d^2} + \frac{10 \cdot 0,40}{0,1d^3} \leq 40 \cdot 10^3 \text{ кПа.}$$

Путем подбора определяем $d = 10,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 10,1 \text{ см}$.

Пример IX.4. Стержень прямоугольного сечения $10 \times 20 \text{ см}$, защемленный одним концом, растягивается силой $F_1 = 50 \text{ кН}$, приложенной с эксцентриситетом 2 см относительно оси x , и изгибается силой $F_2 = 4 \text{ кН}$ (рис. IX.9). Определить нормальные напряжения в точках E , B , C и D сечения в заделке.

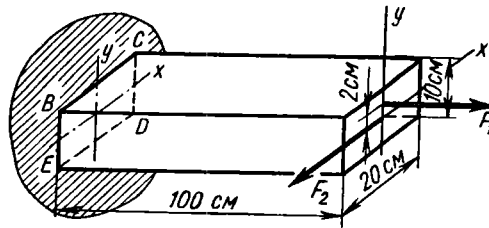


Рис. IX.9

Указание. Сила F_1 вызывает растяжение и изгиб в вертикальной плоскости (относительно оси x), сила F_2 изгибает стержень в горизонтальной плоскости (относительно оси y).

Отв. $\sigma_E = -6,5 \text{ МПа}$ (сжатие), $\sigma_B = -0,5 \text{ МПа}$ (сжатие), $\sigma_C = +11,5 \text{ МПа}$ (растяжение), $\sigma_D = +5,5 \text{ МПа}$ (растяжение).

§ 78. КРУЧЕНИЕ И СРЕЗ.

РАСЧЕТ ПРУЖИН С НЕБОЛЬШИМ ШАГОМ ВИТКА

Совместное действие поперечной силы и крутящего момента имеет место в поперечных сечениях витков пружины с небольшим шагом, сжимаемой или растягиваемой силой F (рис. IX.10).

Для вычисления внутренних усилий в поперечных сечениях стержня пружины применим метод сечений. Сделаем какое-нибудь сечение и рассмотрим равновесие нижней части пружины (рис. IX.11).

Пусть D — средний диаметр пружины, n — число ее витков, d — диаметр поперечного сечения витка. Наклоном витка пренебрегаем.

Равновесие этой части пружины будет обеспечено только в том случае, если в поперечном сечении стержня приложить поперечную силу Q , равную по модулю силе F , и крутящий

момент T , равный моменту, создаваемому силой F относительно центра тяжести сечения (относительно продольной оси витка).

Если принять во внимание наклон витка, то в поперечном сечении проволоки будут возникать еще два усилия: продольная сила и изгибающий момент. Но при малом угле наклона витка эти усилия невелики и ими можно пренебречь.

Силу Q и момент T найдем из уравнений равновесия. Приравнявая нулю сумму проекций на вертикальную ось сил, действующих на отсеченную часть, получаем $Q = F$. Приравнявая

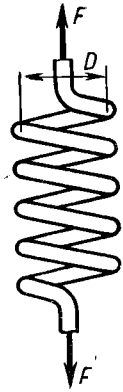


Рис. IX.10

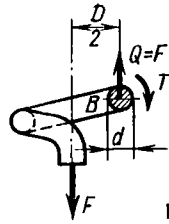


рис. IX.11

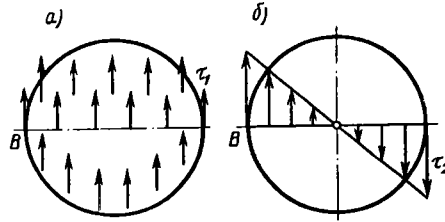


Рис. IX.12

нулю сумму моментов, действующих на отсеченную часть, имеем $T = FD/2$.

Допустим, что касательные напряжения, связанные с поперечной силой, равномерно распределены по сечению (рис. IX.12, а):

$$\tau_1 = Q/A = 4F/(\pi d^2). \quad (IX.23)$$

Примем также, что касательные напряжения, соответствующие деформации кручения (связанные с крутящим моментом), распределены по поперечному сечению витка так же, как при кручении прямого бруса круглого поперечного сечения, т. е. возрастают по линейному закону от центра к периферии сечения (рис. IX.12, б). Следовательно, максимальные напряжения от кручения определяют по формуле

$$\tau_2 = T/W_p = \frac{FD/2}{\pi d^3/16} = 8FD/(\pi d^3). \quad (IX.24)$$

Опасной точкой будет точка B контура, в которой направления τ_1 и τ_2 совпадают. Следовательно, наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad (\text{IX.25})$$

В большинстве случаев второе слагаемое в скобках значительно меньше единицы и им можно пренебречь, что равносильно пренебрежению влиянием среза по сравнению с влиянием кручения.

Тогда приближенно можно принять $\tau_{\max} \approx \tau_2 \approx 8FD/(\pi d^3)$.

На практике расчет пружин с небольшим шагом витка производят по формуле

$$\tau_{\max} = k8FD/(\pi D^3) \leq \tau_{adm}, \quad (\text{IX.26})$$

где k — поправочный коэффициент, учитывающий влияние силы F и влияние кривизны витка на распределение и значение касательных напряжений, связанных с крутящим моментом. Ниже приведены значения k :

D/d	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Для определения осадки (изменения высоты) δ пружины приравниваем работу внешней силы F потенциальной энергии деформации кручения.

Работа силы F на перемещении δ равна $W = F\delta/2$.

Потенциальная энергия деформации при кручении (см. § 39)

$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2 l}{GI_p} = \frac{1}{2} \frac{(FD/2)^2 l}{GI_p},$$

где $l = \pi Dn$ — длина прутка, из которого свита пружина; n — число витков; G — модуль сдвига.

Так как $W = U$ (на основании закона сохранения энергии), то

$$\frac{F\delta}{2} = \frac{F^2 D^2 \pi D n}{8G\pi d^4 / 32},$$

откуда

$$\delta = 8FD^3 n / (Gd^4). \quad (\text{IX.27})$$

Пример IX.5. Проверить прочность пружины и определить ее осадку, если $F = 3$ Кн; $D = 0,2$ м; $\tau_{adm} = 250 \cdot 10^3$ кПа, $d = 0,02$ м; число витков $n = 8$, $G = 8 \cdot 10^7$ кН/м² = $8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Определяем напряженне по формуле (IX.26)

$$\tau_{\max} = 1,14 \frac{8 \cdot 3 \cdot 0,2}{3,14 \cdot 2^3 \cdot 10^{-6}} = 218 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 218 \text{ МПа},$$

что ниже допускаемого на 8,8 %.

Здесь принято $k = 1,14$ при $D/d = 10$ (см. вывод).

Определяем осадку пружины по формуле (IX.27):

$$\delta = \frac{8 \cdot 3 \cdot 20^3 \cdot 10^{-6} \cdot 8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12 \text{ см}.$$

Пример IX.6. Пружина сделана из стальной проволоки $d = 4$ мм. Средний диаметр пружины $D = 45$ мм. Число рабочих витков * пружины $n = 6$. В ненагруженном состоянии зазор между витками $S_0 = 1,0$ мм. С какой силой необходимо сжать пружину, чтобы зазор исчез?

Указание. Осадка пружины до соприкосновения витков

$$\delta = (n - 1) S.$$

Ответ: $F = 23,5$ Н.

§ 79. КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ

Брус, изображенный на рис. IX.13, работает на кручение и изгиб. В машиностроительных конструкциях детали, работающие на кручение и изгиб, встречаются очень часто. Характерным примером таких деталей являются валы различных машин.

Начнем с того, что пользуясь принципом независимости действия сил, определим отдельно напряжения, возникающие в бресе при кручении, и отдельно — при изгибе. При изгибе в поперечных сечениях бруса возникают, как известно, нормальные напряжения, достигающие наибольшего значения в крайних волокнах балки: $\sigma = M/W_x$, и касательные напряжения, достигающие наибольшего значения у нейтральной оси и определяемые по формуле Журавского. Для круглых и вообще массивных сечений значения их незначительны по сравнению с касательными напряжениями от кручения и ими можно пренебречь.

От кручения в поперечных сечениях возникают касательные напряжения, достигающие наибольшего значения в точках контура сечения; $\tau = T/W_p = T/(2W_x)$.

В случае, изображенном на рис. IX.13, сечение, где возникает наибольший изгибающий момент, совпадает с сечением, где

* Полное число витков пружины сжатия на 1,5—2 больше числа рабочих витков, так как крайние витки, соприкасающиеся с опорными тарелками, не участвуют в деформации пружины.

возникает наибольший крутящий момент. Это сечение у заделки. В этом сечении (опасном) опасными являются точки C и B . Рассмотрим напряженное состояние в точке C (рис. IX.14). По площадке поперечного сечения, проходящей через эту точку, действуют наибольшие касательные напряжения от кручения

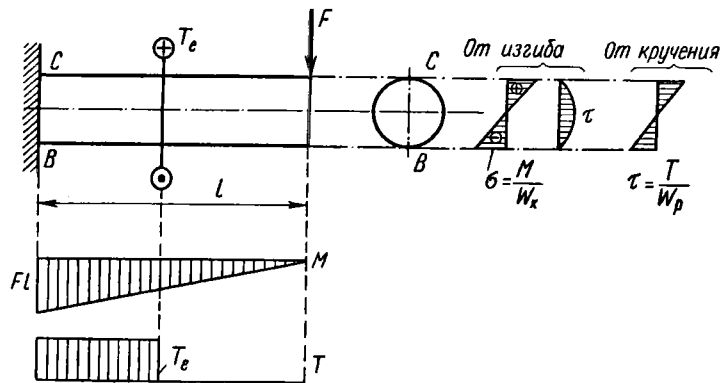


Рис. IX.13

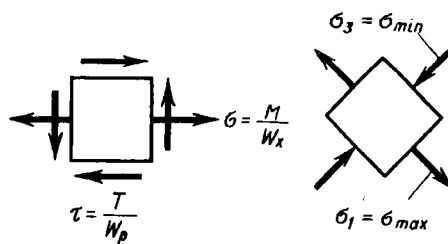


рис. IX.14

$\tau = T/W_p$ и наибольшие (в данном случае растягивающие) нормальные напряжения от изгиба $\sigma = M/W_x$. По площадке продольного сечения нормальные напряжения отсутствуют, а касательные (в силу закона парности) имеют то же значение, что и в поперечном сечении.

Так как напряженное состояние двухосное, то для проверки прочности применяем одну из гипотез прочности. Имея в виду валы, изготовленные из стали, применяем третью или четвертую гипотезу прочности. Для этого необходимо определить главные напряжения для заданного напряженного состояния (рис. IX.14).

Главные напряжения определяются по известной формуле

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Задачу определения угла наклона главных площадок перед собой не ставим; его можно найти по формуле (II.35).

Условие прочности, по третьей гипотезе (гипотеза наибольших касательных напряжений),

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}.$$

Подставляя сюда значения σ_1 и σ_3 , получаем

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.28)$$

Учитывая, что $\sigma = M/W_x$ и $\tau = T/(2W_x)$, получаем

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_x} \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.29)$$

Отсюда получим зависимость для подбора сечения (проектного расчета):

$$W_x = \sqrt{M^2 + T^2} / \sigma_{adm}. \quad (IX.30)$$

Напоминаем, что в случае, если вал испытывает изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

По четвертой гипотезе прочности (гипотезе удельной потенциальной энергии изменения формы), условие прочности для случая плоского напряженного состояния имеет вид

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq \sigma_{adm}.$$

Подставляя значения σ_1 и σ_3 , выраженные через σ и τ в поперечном сечении вала, получаем

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}, \quad (IX.31)$$

но $\sigma = M/W_x$ и $\tau = T/2W_x$, следовательно,

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W_x} \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.32)$$

Отсюда для подбора сечения

$$W_x = \sqrt{M^2 + 0,75T^2} / \sigma_{adm}. \quad (IX.33)$$

Для материалов, имеющих различную прочность на растяжение и сжатие (некоторые сорта легированной стали, чугун, некото-

рые сплавы), следует пользоваться гипотезой прочности Мора. По гипотезе Мора,

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq \sigma_{adm}^t.$$

Подставляя сюда значения σ_1 и σ_3 , получаем

$$\sigma_{red} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (IX.34)$$

или

$$\sigma_{red} = \frac{1-m}{2} \frac{M}{W_x} + \frac{1+m}{2W_x} \sqrt{M^2 + T^2} \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.35)$$

Отсюда получаем зависимость для подбора сечений:

$$W_x = \frac{M(1-m) + (1+m) \sqrt{M^2 + T^2}}{2\sigma_{adm}}. \quad (IX.36)$$

§ 80. КРУЧЕНИЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

В этом случае в поперечных сечениях стержня возникают одновременно два внутренних усилия: крутящий момент и продольная сила (растягивающая или сжимающая).

Для стержня круглого сечения наибольшие касательные напряжения при кручении имеют место в точках контура сечения $\tau = T/W_p$. При растяжении во всех точках поперечного сечения возникают нормальные напряжения $\sigma = N/A$.

Теперь, так же как и в случае кручения с изгибом, следует определить главные напряжения и применить соответствующую гипотезу прочности. В результате получим для эквивалентных напряжений формулу (IX.28) (по третьей гипотезе прочности) или (IX.31) (по четвертой гипотезе). В эти формулы следует подставить значения τ и σ , приведенные выше.

Окончательно получим условие прочности для кручения с растяжением (сжатием):

а) по третьей гипотезе прочности,

$$\sigma_{red} = \sqrt{(N/A)^2 + 4(T/W_p)^2} \leq \sigma_{adm}; \quad (IX.37)$$

б) по четвертой гипотезе прочности,

$$\sigma_{red} = \sqrt{(N/A)^2 + 3(T/W_p)^2} \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.38)$$

Рекомендуется отдавать предпочтение формуле (IX.38), так как четвертая гипотеза для пластичных материалов хорошо согласуется с опытными данными и приводит к более экономичным решениям.

Для материалов, имеющих различную прочность на растяжение и сжатие, по гипотезе Мора получим на основании формулы (IX.34)

$$\sigma_{red} = \frac{1-m}{2} \frac{N}{A} + \frac{1-m}{2} \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4 \left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.39)$$

Для случая одновременного сочетания изгиба, кручения и растяжения (сжатия) аналогичным путем получим расчетную формулу (по четвертой гипотезе прочности) в следующем виде:

$$\sigma_{red} = \sqrt{(N/A + M/W_x)^2 + 3 (T/W_p)^2} \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.40)$$

При подборе сечений следует применять способ последовательных приближений, т. е. задаваться каким-нибудь значением диаметра и проверять, выполняются ли условия прочности (IX.38), (IX.39) или (IX.40). Если получается большая разница между левой и правой частями, следует задаваться новым значением диаметра и т. д. (при пользовании логарифмической линейкой или микрокалькулятором этот процесс не требует большой затраты времени).

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент запаса прочности вычисляют по формуле

$$n = \sigma_y / \sigma_{red}, \quad (IX.41)$$

где σ_y — предел текучести; σ_{red} — эквивалентное (приведенное) напряжение по соответствующей гипотезе прочности.

Для пластичных материалов эквивалентное напряжение можно вычислять по третьей гипотезе прочности, пользуясь формулой (IX.28). В этом случае коэффициент запаса прочности

$$n = \sigma_y / \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Эту формулу можно также представить в виде

$$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau^2}{(\sigma_y/2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau^2}{\tau_y^2}}}, \quad (IX.42)$$

где $\tau_y = \sigma_y/2$ (в соответствии с третьей гипотезой прочности).

Формулу (IX.42) после некоторых преобразований приводят к виду

$$n = \frac{1}{\sqrt{1/n_\sigma^2 + 1/n_\tau^2}} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \quad (IX.43)$$

где $n_\sigma = \sigma_y / \sigma$ — коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям; $n_\tau = \tau_y / \tau$ — коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям.

Следует заметить, что формулы (IX.42) и (IX.43) остаются в силе и при применении четвертой гипотезы прочности, с той лишь разницей, что в этом случае $\tau_y \approx 0,58\sigma_y$.

§ 81. ПРИМЕР РАСЧЕТА ВАЛА НА ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Валы, работающие на кручение и изгиб, в процессе их проектирования рассчитывают на статическую прочность по наибольшим кратковременным усилиям, а также на выносливость по длительно действующим переменным усилиям (см. гл. XII).

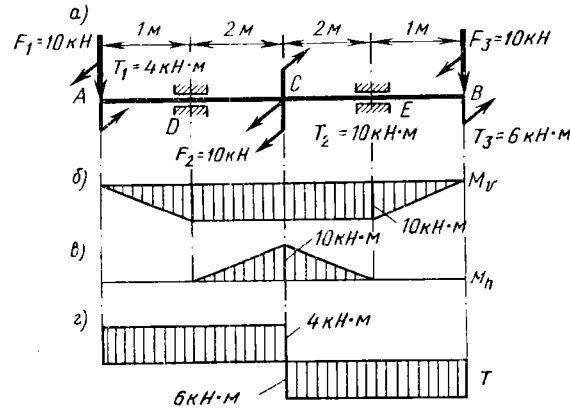


Рис. IX.15

Приведем пример расчета вала (рис. IX.15, а) на статическую прочность. На вал действуют две вертикальные силы F_1 и F_3 , одна горизонтальная сила F_2 и три внешних момента: $T_1 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $T_2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $T_3 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$, вызывающих деформацию кручения. Материал вала — сталь 45, предел текучести $\sigma_y = 360 \text{ МПа}$, предел прочности $\sigma_u = 610 \text{ МПа}$.

По данным, приведенным в § 11, устанавливаем общий нормативный коэффициент запаса прочности n , как произведение трех частных коэффициентов:

$$n = n_1 n_2 n_3.$$

Принимаем $n_1 = 1,3$ (учитываем среднюю точность определения напряжений), $n_2 = 1,4$ (для отношения $\sigma_y / \sigma_u = 0,6$), $n_3 = 1,3$ (учитываем среднюю степень ответственности детали).

Таким образом, общий коэффициент запаса

$$n_1 = 1,3 \cdot 1,4 \cdot 1,3 = 2,36.$$

Допускаемое напряжение $\sigma_{adm} = 360/2,36 = 150$ МПа.

1. Строим эпюру изгибающих моментов от вертикальных сил M_v (рис. IX.15, б).

2. Строим эпюру изгибающих моментов от горизонтальных сил. Эпюра M_h , условно совмещенная с плоскостью чертежа, показана на рис. IX.15, в.

Поскольку сечение вала круглое, расчет ведется по формулам плоского изгиба по результирующему (суммарному) моменту.

3. Суммарные изгибающие моменты в сечениях С и Е:

$$M_{tot}^D = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{tot}^C = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{tot}^E = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Строим эпюру крутящих моментов. Эпюра T показана на рис. IX.15, г.

Определяем диаметр вала в опасном сечении С, где действуют наибольший изгибающий момент $M_{tot}^C = 14,1$ кН·м и крутящий момент $T = 6$ кН·м.

Для подбора сечения применяем четвертую гипотезу прочности:

$$W_x = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{\sigma_{adm}} = \frac{\sqrt{14,1^2 + 0,75 \cdot 6^2}}{150 \cdot 10^3} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{W_x/0,1} = \sqrt[3]{0,0001/0,1} = 0,1 \text{ м} = 10 \text{ см}.$$

§ 82. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ

В технике часто встречаются сосуды, стенки которых воспринимают давление жидкостей, газов и сыпучих тел (паровые котлы, резервуары, рабочие камеры двигателей, цистерны и т. п.). Если сосуды имеют форму тел вращения и толщина стенок их незначительна, а нагрузка осесимметрична, то определение напряжений, возникающих в их стенках под нагрузкой, производится весьма просто.

В таких случаях без большой погрешности можно принять, что в стенках возникают только нормальные напряжения (растягивающие или сжимающие) и что эти напряжения распределяются равномерно по толщине стенки.

Расчеты, основанные на таких допущениях, хорошо подтверждаются опытами, если толщина стенки не превосходит примерно $1/10$ минимального радиуса кривизны стенки.

Вырежем из стенки сосуда элемент с размерами dl_1 и dl_2 ; толщину стенки обозначим t (рис. IX.16). Радиусы кривизны поверхности сосуда в данном месте ρ_1 и ρ_2 . Нагрузка на элемент — внутреннее давление p , нормальное к поверхности элемента.

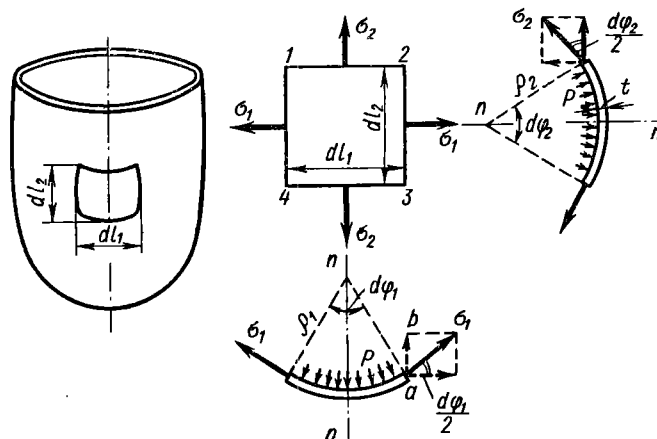


Рис. IX.16

Заменим взаимодействие элемента с оставшейся частью сосуда внутренними силами, интенсивность которых равна σ_1 и σ_2 . Поскольку толщина стенок незначительна, как уже было отмечено, можно считать эти напряжения равномерно распределенными по толщине стенки.

Составим условие равновесия элемента, для чего спроецируем силы, действующие на элемент, на направление нормали nn к поверхности элемента. Проекция нагрузки равна $p dl_1 dl_2$. Проекция напряжения σ_1 на направление нормали представится отрезком ab , равным $\sigma_1 \sin d\varphi_1/2$.

Проекция усилия, действующего на грани 14 (и 23), равна $2\sigma_1 t dl_2 \sin d\varphi_1/2$. Аналогично, проекция усилия, действующего по грани 12 (и 43), $2\sigma_2 t dl_1 \sin d\varphi_2/2$.

Спроецировав все силы, приложенные к выделенному элементу, на направление нормали nn , получим

$$p dl_1 dl_2 - 2\sigma_1 t dl_2 \sin d\varphi_1/2 - 2\sigma_2 t dl_1 \sin d\varphi_2/2 = 0.$$

Ввиду малости размеров элемента можно принять

$$\sin d\varphi_1/2 \approx d\varphi_1/2 \text{ и } \sin d\varphi_2/2 \approx d\varphi_2/2.$$

С учетом этого из уравнения равновесия получим

$$p \, dl_1 \, dl_2 - \sigma_1 t \, dl_2 \, d\varphi_1 - \sigma_2 t \, dl_1 \, d\varphi_2 = 0.$$

Учитывая, что $d\varphi_1 = dl_1/\rho_1$ и $d\varphi_2 = dl_2/\rho_2$, имеем

$$p \, dl_1 \, dl_2 - \sigma_1 \, dl_1 \, dl_2 t / \rho_1 - \sigma_2 \, dl_1 \, dl_2 t / \rho_2 = 0.$$

Сократив на $dl_1 \, dl_2$ и разделив на t , получим

$$\sigma_1 / \rho_1 + \sigma_2 / \rho_2 = p / t. \quad (\text{IX.44})$$

Эта формула называется **формулой Лапласа**.

Рассмотрим расчет двух видов сосудов, часто встречающихся на практике: сферического и цилиндрического*. При этом ограничимся случаями действия внутреннего газового давления.

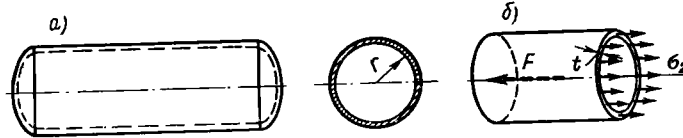


Рис. IX.17

1. **Сферический сосуд.** В этом случае $\rho_1 = \rho_2 = r$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Из формулы (IX.44) следует $2\sigma/r = p/t$, откуда

$$\sigma = pr / (2t). \quad (\text{IX.45})$$

Так как в данном случае имеет место плоское напряженное состояние, то для расчета на прочность необходимо применить ту или иную теорию прочности. Главные напряжения имеют следующие значения: $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma$; $\sigma_3 = 0$. По третьей гипотезе прочности; $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}$. Подставляя $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_3 = 0$, получаем

$$\sigma = pr / (2t) \leq \sigma_{adm},$$

т. е. проверка прочности ведется, как в случае одноосного напряженного состояния.

По четвертой гипотезе прочности, $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_{adm}$. Так как в данном случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и $\sigma_3 = 0$, то

$$\sigma = pr / (2t) \leq \sigma_{adm},$$

т. е. то же условие, что и по третьей гипотезе прочности.

2. **Цилиндрический сосуд.** В этом случае (рис. IX.17, a) $\rho_1 = r$ (радиус цилиндра) и $\rho_2 = \infty$ (радиус кривизны образующей цилиндра).

* Примеры расчета тонкостенных сосудов другой формы см. в полных курсах сопротивления материалов.

Из уравнения Лапласа получаем $\sigma_1/r = p/t$, откуда

$$\sigma_1 = pr/t. \quad (IX.46)$$

Для определения напряжения σ_2 рассечем сосуд плоскостью, перпендикулярной его оси, и рассмотрим условие равновесия одной из частей сосуда (рис. IX.17, б).

Проецируя на ось сосуда все силы, действующие на отсеченную часть, получаем

$$-F + \sigma_2 2\pi r t = 0,$$

где $F = \pi r^2 p$ — равнодействующая сил давления газа на днище сосуда.

Таким образом, $-\pi r^2 p + \sigma_2 2\pi r t = 0$, откуда

$$\sigma_2 = pr/(2t). \quad (IX.47)$$

Заметим, что в силу тонкостенности кольца, представляющего собой сечение цилиндра, по которому действуют напряжения σ_2 , площадь его подсчитана как произведение длины окружности на толщину стенки.

Сравнивая σ_1 и σ_2 в цилиндрическом сосуде, видим, что $\sigma_2 = \sigma_1/2$.

Условие прочности, по третьей гипотезе прочности, для цилиндрического сосуда

$$\sigma_{red} = \sigma_1 = pr/t \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.48)$$

Условие прочности, по четвертой гипотезе прочности,

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_{adm}.$$

Подставив значения σ_1 и σ_2 из формул (IX.46) и (IX.47), получим из предыдущей формулы

$$\sigma_{red} = 0,86pr/t \leq \sigma_{adm}. \quad (IX.49)$$

Разница в результатах, получаемых по формулам (IX.48) и (IX.49), составляет 14 %. Рекомендуется применять формулу, основанную на четвертой гипотезе прочности.

Пример IX.7. Определить, применяя четвертую гипотезу прочности, толщину стенок цилиндрического котла диаметром $D = 2$ м, находящегося под внутренним давлением пара $p = 1$ МПа = 1000 кПа, $\sigma_{adm} = 100$ МПа = $100 \cdot 10^3$ кПа.

Решение. Из формулы (IX.49) имеем

$$t = \frac{0,86pr}{\sigma_{adm}} = \frac{0,86 \cdot 1000 \cdot 1}{100 \cdot 10^3} = 0,86 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,86 \text{ см} = 8,6 \text{ мм}.$$

Принимаем $t = 10$ мм.

Пример IX.8. Определить толщину стенок цилиндрического резервуара для хранения жидкости с удельным весом $\gamma = 10 \text{ кН/м}^3$; размеры резервуара показаны на рис. IX.18. Допускаемое напряжение для материала стенок $\sigma_{adm} = 100 \text{ МПа} = 100 \cdot 10^3 \text{ кПа}$.

Решение. Давление жидкости на стенки сосуда пропорционально расстоянию от свободной поверхности:

$$p = \gamma z.$$

Если толщина стенки сосуда постоянна, то расчет ведется по наибольшему давлению у основания:

$$p_{\max} = p_3 = \gamma h = 10 \cdot 9 = 90 \text{ кН/м}^2.$$

Толщина стенки на основании формулы (IX.48)

$$t_3 = \frac{90 \cdot 3}{100 \cdot 10^3} = 0,27 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,27 \text{ см} \approx 3 \text{ мм}.$$

Если по условиям коррозии может быть допущена меньшая толщина, то следует применять сосуды с переменной толщиной стенок, разбивая их на секции и определяя толщину стенок секций по давлениям p_1 , p_2 и p_3 (внизу каждой секции).

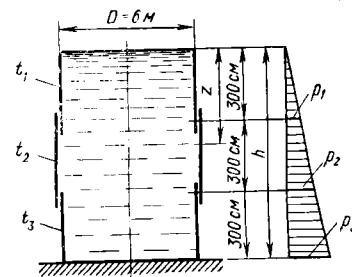


Рис. IX.18

ГЛАВА X
РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
(ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ)

§ 83. УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Из теоретической механики известно, что равновесие абсолютно твердого тела может быть **устойчивым, безразличным и неустойчивым**. Например, шар, лежащий на вогнутой поверхности, находится в состоянии устойчивого равновесия. Если ему сообщить небольшое отклонение от этого положения и отпустить, то он снова возвратится в свое исходное положение (рис. X.1, а). Шар, лежащий на горизонтальной поверхности, находится в состоянии безразличного равновесия (рис. X.1, б).

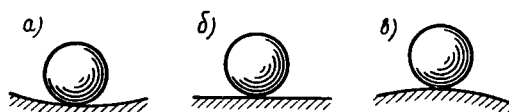


Рис. X.1

Будучи отклоненным от этого положения, он в исходное положение не возвращается, но движение его прекращается. Наконец, шар, лежащий на выпуклой поверхности, находится в состоянии неустойчивого равновесия (рис. X.1, в). Будучи отклоненным от первоначального положения, он продолжает двигаться дальше.

Аналогичные примеры можно привести и из области равновесия деформирующихся тел.

Так, длинный стержень при действии сравнительно небольшой осевой сжимающей силы (меньшей некоторого критического значения) находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. X.2, а). Если незначительно изогнуть его какой-нибудь поперечной нагрузкой и затем эту нагрузку убрать, то стержень вновь распрямится, примет первоначальную форму равновесия.

Искривленная форма равновесия стержня при этом оказывается неустойчивой и потому невозможной.

При значении сжимающей силы, превосходящей определенное критическое значение, наоборот, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и поэтому сменяется криволи-

нейной формой равновесия, которая оказывается при этом устойчивой (рис. X.2, а).

Наименьшее значение сжимающей силы, при котором сжатый стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму равновесия, называется **критической силой** и обозначается F_{cr} (рис. X.2, б).

По определению Эйлера, критической силой называется **сила, требующаяся для самого малого наклона колонны.**

Рассмотренная схема работы центрального сжатого стержня носит несколько теоретический характер. На практике приходится считаться с тем, что сжимающая сила может действовать с некоторым эксцентриситетом, а стержень может иметь некоторую (хотя бы и небольшую) начальную кривизну.

Поэтому с самого начала продольного нагружения стержня наблюдается его изгиб.

Исследования показывают, что, пока сжимающая сила меньше критической, прогибы стержня будут небольшими, но при приближении значения силы к критическому они начинают чрезвычайно быстро возрастать (рис. X.2, в).

Этот критерий (теоретически неограниченный рост прогибов при ограниченном росте сжимающей силы) может быть принят за критерий потери устойчивости. Практически, стержень разрушится раньше, в результате исчерпания прочности материала.

Определив критическую силу, необходимо установить допустимую нагрузку на сжатый стержень.

В целях безопасности **допускаемая нагрузка**, естественно, должна быть меньше критической:

$$F_{adm} = F_{cr} / n_s, \quad (X.1)$$

где n_s — коэффициент запаса устойчивости*.

Коэффициент запаса устойчивости принимается таким, чтобы была обеспечена надежная работа стержня, несмотря на то что действительные условия его работы могут быть менее благоприятны, чем условия, принятые для расчета (из-за неоднородности материалов, неточности в определении нагрузок и т. д.). При этом коэффициент запаса устойчивости принимается несколько большим коэффициента запаса прочности, так как

* Индекс s от *stability* (англ.) — устойчивость.

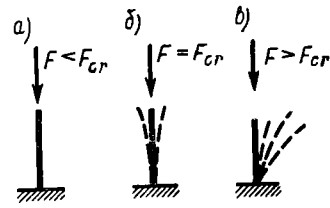


Рис. X.2

учитываются дополнительные неблагоприятные обстоятельства: начальная кривизна стержня, возможный эксцентриситет действия нагрузки и др.

Для стали нормативный коэффициент запаса устойчивости n_s принимается в пределах от 1,8 до 3, для чугуна — от 5 до 5,5, для дерева — от 2,8 до 3,2. Указанные значения коэффициентов запаса устойчивости принимаются при расчете строительных конструкций. Значения n_s , принимаемые при расчете элементов машиностроительных конструкций (например, ходовых винтов металлорежущих станков), выше указанных; так, для стали принимают $n_s = 4 \div 5$. Чтобы лучше учесть конкретные условия работы сжатых стержней, рекомендуется применять не один общий коэффициент запаса устойчивости, а систему частных коэффициентов, так же как и при расчете на прочность.

Потеря устойчивости упругого равновесия возможна также при кручении, изгибе и сложных деформациях.

Исследования показывают, что потеря устойчивости была причиной многих катастроф и аварий конструкций.

§ 84. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Рассмотрим сжатый стержень в критическом состоянии, когда сжимающая сила достигла критического значения, т. е. примем, что стержень слегка изогнут (рис. X.3). Если моменты инерции относительно двух главных центральных осей поперечного сечения не равны между собой, то продольный изгиб произойдет в плоскости наименьшей жесткости, т. е. поперечные сечения стержня будут поворачиваться вокруг той оси, относительно которой момент инерции имеет минимальное значение. В этом легко убедиться, сжимая гибкую линейку.

Для изучения продольного изгиба и определения критической силы используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (см. § 58)

$$EI_{\min} v'' = M. \quad (X.2)$$

Изгибающий момент относительно центра тяжести сечения B в изогнутом состоянии

$$M = -F_{cr} v. \quad (X.3)$$

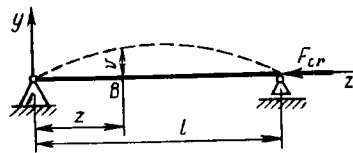


Рис. X.3

Знак минус берется потому, что стержень изгибается выпуклостью вверх, а прогиб v положителен. Если бы стержень изогнулся выпуклостью вниз, то момент был бы положительным,

но прогибы v были бы отрицательными, и мы снова получили бы тот же результат (X.3). С учетом (X.3) уравнение (X.2) принимает вид

$$EI_{\min} v'' = -F_{cr} v.$$

Обозначая $\alpha^2 = F_{cr}/(EI_{\min})$, получаем

$$v'' + \alpha^2 v = 0. \quad (X.4)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение, как известно из математики, имеет вид

$$v = C \cos \alpha z + D \sin \alpha z. \quad (X.5)$$

Здесь C и D — постоянные интегрирования, для определения которых используем известные условия на концах стержня: 1) при $z=0$, $v=0$; 2) при $z=l$, $v=0$.

Из первого условия получим $C=0$. Следовательно, стержень изгибается по синусоиде $v = D \sin \alpha z$. Из второго условия получим $D \sin \alpha l = 0$. Это соотношение справедливо в двух случаях.

1-й случай. $D=0$. Но если $C=0$ и $D=0$, то, как следует из уравнения (X.5), прогибы стержня равны нулю, что противоречит исходной предпосылке.

2-й случай. $\sin \alpha l = 0$. Это условие выполняется, когда αl принимает следующий бесконечный ряд значений: $\alpha l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$, где n — любое целое число. Отсюда $\alpha = n\pi/l$, а так как $\alpha = \sqrt{F_{cr}/(EI_{\min})}$, то $F_{cr} = \pi^2 I_{\min} E n^2 / l^2$. Таким образом, получается бесчисленное множество значений критических сил, соответствующих различным формам искривления стержня.

С практической точки зрения интерес представляет лишь наименьшее значение критической силы, при котором происходит потеря устойчивости стержня.

Первый корень $n=0$ не дает решения задачи. При $n=1$ получаем наименьшее значение критической силы:

$$F_{cr} = \pi^2 EI_{\min} / l^2. \quad (X.6)$$

Это и есть **формула Эйлера**.

Критической силе, определяемой по этой формуле, соответствует изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной:

$$v = D \sin \frac{\pi}{l} z.$$

Следующие корни дают большие значения критической силы, и мы их рассматривать не будем. Им соответствует изгиб стержня по синусоиде с несколькими полуволнами, который получается в том случае, если изгиб по синусоиде с одной полуволной

почему-либо невозможен, например из-за наличия промежуточных связей.

Следует обратить внимание на то, что постоянная D , а следовательно, и форма изогнутой оси стержня остались неопределенными.

Если применить для исследования продольного изгиба не приближенное, а точное дифференциальное уравнение изогнутой оси (VII.3), то оказывается возможным определить не только значение критической силы, но и зависимость между сжимающей силой и прогибом стержня.

§ 85. ВЛИЯНИЕ СПОСОБА ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ НА КРИТИЧЕСКУЮ СИЛУ

Чаще всего концы стержня закрепляют одним из четырех способов, показанных на рис. X.4.

Второй способ — шарнирное закрепление обоих концов — рассмотрен нами при выводе формулы Эйлера.

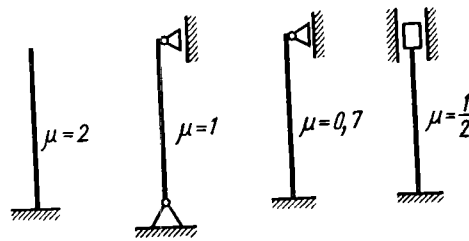


Рис. X.4

При других способах закрепления обобщенная формула Эйлера для определения критической нагрузки имеет вид

$$F_{cr} = \pi^2 EI_{\min} / (\mu l)^2, \quad (X.7)$$

где μ — коэффициент приведения длины стержня (коэффициент Ясинского), зависящий от способа закрепления концов стержня (рис. X.4); $l_{red} = \mu l$ — приведенная длина стержня.

Формула (X.7) получается, если рассмотреть дифференциальное уравнение продольного изгиба

$$v^{IV} + \alpha^2 v'' = 0,$$

которое следует из уравнения (X.4) после двукратного дифференцирования.

Решение этого уравнения имеет вид

$$v = K \sin \alpha z + B \cos \alpha z + Cz + D.$$

Постоянные K, B, C, D определяются из граничных условий. Например, для третьего случая закрепления (рис. X.4) при начале координат на нижнем конце имеем (l — длина стержня):

1) $v_{z=0}=0$; 2) $v'_{z=0}=0$; 3) $v_{z=l}=0$; 4) $M_{z=l}=EIv''_{z=l}=0$ или $v''_{z=l}=0$.

Используя эти условия, получим

$$B + D = 0; K\alpha + C = 0; K \sin \alpha l + B \cos \alpha l + Cl + D = 0; \\ K \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0.$$

Из математики известно, что система однородных уравнений (т. е. без свободных членов) имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & l & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим $\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l$. Наименьший корень этого уравнения, отличный от нуля, $\alpha l = 4,49$, тогда

$$F_{cr} = 4,49^2 \cdot EI/l^2 \approx \pi^2 EI / (0,7l)^2.$$

Таким образом, $\mu \approx 0,7$.

Аналогично получают значения коэффициентов, указанные на рис. X.4, при других способах закрепления концов стержня.

Как видно из формулы (X.7), чем меньше μ , тем больше критическая, а следовательно, и допустимая нагрузка стержня. Например, нагрузка стержня, заделанного двумя концами, может быть в 16 раз больше нагрузки стержня, заделанного одним концом. Поэтому там, где возможно, следует осуществлять жесткую заделку обоих концов стержня. Однако это не всегда можно осуществить на практике. Элементы, к которым прикрепляются концы рассматриваемого стержня, всегда более или менее упруги, податливы, что вносит некоторую неопределенность в расчет. Поэтому весьма часто даже при жестком соединении концов стержня с другими элементами расчет в запас устойчивости ведут, предполагая шарнирное закрепление обоих концов.

§ 86. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Формулой Эйлера не всегда можно пользоваться. При ее выводе мы пользовались дифференциальным уравнением упругой линии, вывод которого основан на законе Гука. Закон же Гука, как известно, справедлив до тех пор, пока напряжения не превосходят предела пропорциональности.

Чтобы установить пределы применимости формулы Эйлера, определим **критическое напряжение** σ_{cr} , т. е. напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня при действии критической нагрузки:

$$\sigma_{cr} = F_{cr}/A = \pi^2 E I_{\min} / [(\mu l)^2 A], \quad (X.8)$$

где A — площадь поперечного сечения стержня.

Но $i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A}$ — наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня. Поэтому формулу (X.8) можно записать в виде

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / (\mu l / i_{\min})^2.$$

Величина $\mu l / i_{\min}$ характеризует влияние размеров стержня и способа закрепления концов; она называется **гибкостью стержня** и обозначается λ . Гибкость — величина безразмерная. Таким образом, обозначая $\lambda = \mu l / i_{\min}$, получаем

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2.$$

Чтобы можно было пользоваться формулой Эйлера, необходимо удовлетворить следующему условию:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{pr}, \quad (X.9)$$

где σ_{pr} — предел пропорциональности материала стержня.

Записывая формулу (X.9) относительно гибкости, получаем условие применимости формулы Эйлера в виде

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{pr}}. \quad (X.10)$$

Например, для стали Ст3 $\sigma_{pr} = 200$ МПа и

$$\lambda > \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 / 200} \geq 100.$$

Таким образом, для стержней из малоуглеродистой стали формула Эйлера применима, если их гибкость больше 100.

Аналогичным образом получим условия применимости формулы Эйлера для чугуна: $\lambda \geq 80$.

Для средне- и высокоуглеродистых, а также для легированных сталей формула Эйлера применима и при гибкости, меньшей указанной. Так, для стержней из хромомолибденовой стали формула Эйлера применима при $\lambda \geq 70$.

§ 87. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Если, как это очень часто случается на практике, гибкость стержней будет меньше указанных значений, то формула Эйлера становится неприменимой, так как критические напряжения превзойдут предел пропорциональности и закон Гука потеряет силу.

Существуют приближенные теоретические методы определения критических сил при потере устойчивости в неупругой стадии, но их рассмотрение выходит за рамки настоящего курса.

В этих случаях обычно пользуются следующей эмпирической формулой Тетмайера — Ясинского, полученной на основании многочисленных опытов:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (\text{X.11})$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала. Для стали Ст3 при гибкостях $\lambda = 40 \div 100$ коэффициенты a и b могут быть приняты равными: $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

При гибкостях $\lambda < 40$ стержни можно рассчитывать на прочность без учета опасности продольного изгиба.

§ 88. ПРАКТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Вместо двух формул (Эйлера и Ясинского), каждая из которых пригодна для определенного диапазона гибкостей, удобнее иметь одну формулу, которой можно было бы пользоваться при любой гибкости стержня.

Эта практическая формула, широко применяющаяся при расчете строительных конструкций, имеет вид

$$F_{adm} = \varphi \sigma_{adm}^c A, \quad (\text{X.12})$$

где σ_{adm}^c — основное допускаемое напряжение на сжатие; φ — коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения (или коэффициент продольного изгиба). Величина φ зависит от материала и гибкости стержня. Его значения приведены в табл. X.1; A — площадь поперечного сечения стержня.

Величина $\varphi \sigma_{adm}^c$ может рассматриваться как допускаемое напряжение при расчете на устойчивость, т. е.

$$\sigma_{adm}^s = \varphi \sigma_{adm}^c. \quad (\text{X.13})$$

Основное допускаемое напряжение на сжатие σ_{adm}^c , как известно [см. формулу (II.17)],

$$\sigma_{adm}^c = \sigma_u / n,$$

Таблица X.1

Гибкость λ	φ для				
	сталей Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	стали Ст5	стали повышен- ного качества $\delta_y \geq 320$ МПа	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

где σ_u — предельное напряжение, принимаемое равным пределу текучести для пластичных материалов и пределу прочности для хрупких материалов.

Связь между коэффициентом φ , критическим напряжением σ_{cr} , предельным напряжением σ_u и коэффициентами запаса прочности n и устойчивости n_s можно установить следующим образом:

$$\sigma_{adm}^s = \varphi \sigma_{adm}^c = \sigma_{cr} / n_s, \quad (X.14)$$

откуда

$$\varphi = \sigma_{cr} / \sigma_{adm}^c n_s. \quad (X.15)$$

Используя формулу (II.17), получим

$$\varphi = \sigma_{cr} n / (\sigma_u n_s). \quad (X.16)$$

Для подбора сечения формулу (X.12) приводят к следующему виду:

$$A = F_{adm} / (\varphi \sigma_{adm}^c).$$

При этом значением φ приходится задаваться, так как гибкость λ неизвестна, ибо неизвестна площадь сечения A , а гибкость

зависит от нее. В качестве первого приближения рекомендуется принимать $\varphi_1 = 0,5$. Затем определяют величины A , I_{\min} , i_{\min} , λ и по табл. X.1 находят соответствующее значение φ'_1 .

Если получается большая разница между значениями φ_1 и φ'_1 , то следует повторить расчет, задавшись новым значением φ_2 :

$$\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi'_1) / 2$$

и т. д., пока разница между последовательными значениями не будет превышать 4—6 %.

Для стержней, сечения которых имеют значительные ослабления (например, от отверстий), кроме расчета на устойчивость должен производиться и обычный расчет на прочность по формуле

$$\sigma = F / A_{nt} \leq \sigma_{adm}^c,$$

где A_{nt} — рабочая (нетто) площадь сечения стержня.

При расчете же на устойчивость берется полная площадь сечения A_{br} .

В некоторых случаях (например, при расчете элементов машиностроительных конструкций) значения коэффициентов запаса устойчивости n_s , предусмотренные при составлении таблиц коэффициентов φ ($n_s \approx 1,8$), недостаточны. В этих случаях расчет следует вести, исходя непосредственно из требуемого коэффициента n_s и пользуясь формулой Эйлера или Ясинского. Так же следует поступать при расчете на устойчивость стержней из материалов, которые не отражены в таблице коэффициентов φ .

§ 89. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СЕЧЕНИЙ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

При заданных нагрузке, длине стержня, допуске напряжении форма и размеры поперечного сечения сжатого стержня характеризуются **радиусом инерции**

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}.$$

Радиус инерции i — величина размерная. Для сравнения различных сечений между собой более удобной является безразмерная величина

$$\rho_{\min} = i_{\min} / \sqrt{A} = \sqrt{I_{\min} / A}, \quad (X.17)$$

которую называют **удельным радиусом инерции**.

Ниже приведены значения ρ_{\min} для некоторых наиболее распространенных сечений:

Тип сечения	ρ_{\min}
Прямоугольник при $h/b=2$	0,204
Квадрат	0,289
Круг	0,36
Двутавр	0,27—0,41
Швеллер	0,38—0,45
Уголки равнобокие	0,4—0,6
Кольцо при $c=0,7 \div 0,9$	0,86—1,53

Как видим, наименее выгодными являются прямоугольные сплошные сечения, у которых моменты инерции относительно главных осей не равны между собой и, следовательно, не соблюдается принцип равной устойчивости стержня в обеих главных плоскостях инерции.

Наиболее выгодными являются кольцевые, а также коробчатые тонкостенные сечения. Подсчеты показывают, что замена сжатых сечений в виде уголков и двутавров трубчатыми стержнями дает экономию в материале до 20—40 %.

Пример X.1. Подобрать двутавровое сечение сжатого стержня с шарнирным закреплением концов, если сжимающая сила $F=0,5$ МН, длина стержня 2 м. Основное допускаемое напряжение $\sigma_{adm}^c = 160$ МПа.

Решение. Принимая в качестве первого приближения $\varphi_1 = 0,5$, получаем

$$A = F / (\varphi_1 \sigma_{adm}^c) = 0,5 / (0,5 \cdot 160) = 0,00625 \text{ м}^2 = 62,5 \text{ см}^2.$$

Из таблиц сортамента (ГОСТ 8239—72) выбираем двутавр № 36, у которого $A = 61,9 \text{ см}^2$.

Наименьший радиус инерции из тех же таблиц сортамента $i_{\min} = i_y = 2,89 \text{ см}$. Гибкость стержня $\lambda = \mu l / i_{\min} = 1 \cdot 200 / 2,89 = 69,5 \approx 70$.

Коэффициент φ по табл. X.1 для стали Ст3 при $\lambda = 70$ равен $\varphi_1 = 0,81$. Разница между φ_1 и φ_1' значительная, поэтому повторим расчет, принимая

$$\varphi_2 = (0,5 + 0,81) / 2 \approx 0,65.$$

Тогда

$$A = 0,5 / (0,65 \cdot 160) = 0,0048 \text{ м}^2 = 48 \text{ см}^2.$$

Принимаем двутавр № 30, у которого $A = 46,5 \text{ см}^2$, $i_y = 2,69 \text{ см}$. Гибкость стержня

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 200 / 2,69 \approx 75.$$

Коэффициент φ из табл. X.1 (интерполируя значения, соответствующие $\lambda = 70$ и $\lambda = 80$) получаем равным $\varphi_2 = 0,78$.

Напряжение в поперечном сечении стержня получается при этом

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{0,5}{46,5 \cdot 10^{-4}} = 108 \text{ МПа.}$$

Допускаемое же напряжение при расчете на устойчивость

$$\sigma_{adm}^s = \varphi_2^s \sigma_{adm}^c = 0,78 \cdot 160 = 122,5 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение составляет $(122,5 - 108) \cdot 100 / 122,5 = 11,8 \%$. Делаем еще одну попытку. Примем $\varphi_3 = (0,78 + 0,65) / 2 = 0,72$. Получим $A = 0,5 / (0,72 \cdot 160) = 0,00435 \text{ м}^2 = 43,5 \text{ см}^2$.

Примем двутавр № 27, у которого $A = 40,2 \text{ см}^2$, $i_y = 2,54 \text{ см}$. Получим гибкость стержня $\lambda = 200 / 2,54 = 79$.

Из таблиц коэффициент $\varphi_3^s = 0,75$.

Напряжение $\sigma = 0,5 / (40,2 \cdot 10^{-4}) = 125 \text{ МПа}$.

Допускаемое напряжение $\varphi_3^s \sigma_{adm}^c = 0,75 \cdot 160 = 120 \text{ МПа}$.

Перенапряжение $(125 - 120) \cdot 100 / 120 \% = 4,2 \%$, что допустимо.

Пример X.2. Подобрать размеры кольцевого сечения при тех же данных, что и в предыдущем примере. Отношение внутреннего диаметра трубы к внешнему принять $c = d/D = 0,9$. Площадь кольцевого сечения сравнить с площадью двутавра, выбранного в предыдущем примере.

Отвечает: $D = 14,5 \text{ см}$, $d = 13 \text{ см}$, $A = 32 \text{ см}^2$. По сравнению с двутавровым сечением экономия материала составляет $(46,4 - 32) \cdot \frac{100}{46,4} = 31 \%$.

Пример X.3. Определить допускаемую нагрузку сжатого стержня из стали Ст3, имеющего прямоугольное сечение $4 \times 6 \text{ см}$. Концы стержня закреплены шарнирно.

Длина стержня $l = 80 \text{ см}$. Требуемый коэффициент запаса устойчивости $n_s = 3$. Так как задан определенный коэффициент запаса устойчивости, то расчет ведем непосредственно по формулам Эйлера или Ясинского.

Чтобы определить, какой из указанных формул следует пользоваться определяем гибкость стержня:

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu l / i_{\min}, \text{ где } i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A} = \sqrt{b^3 h / (12 b h)} = \\ &= \sqrt{b^2 / 12} = \sqrt{4^2 / 12} = 1,15 \text{ см}; \\ \lambda &= 80 / 1,15 = 69,5. \end{aligned}$$

Гибкость меньше 100, т. е. формула Эйлера для стержня из малоуглеродистой стали неприменима.

Следовательно, расчет должен быть выполнен по формуле Ясинского:

$$\begin{aligned} F_{adm} &= \frac{F_{cr}}{n_s} = \frac{\sigma_{cr} A}{n_s} = \frac{(a - b \lambda) A}{n_s} = \\ &= \frac{(310 - 1,14 \cdot 69,5) \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{3} = 0,18 \text{ МН.} \end{aligned}$$

§ 90. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Рассмотрим снова случай одновременного действия на стержень осевой сжимающей силы и поперечной нагрузки (рис. X.5). Под действием этой нагрузки стержень деформируется, как показано на рисунке штриховой линией. Если деформации малы по сравнению с размерами сечения, то напряжения в стержне можно определять, пользуясь принципом независимости действия сил, т. е. отдельно от сжимающей силы, по формуле

$$\sigma_1 = -F/A \quad (X.18)$$

и отдельно от поперечной нагрузки, вызывающей изгиб, по формуле

$$\sigma_2 = \pm M_0/W_x, \quad (X.19)$$

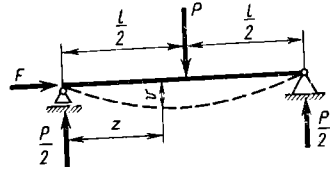


Рис. X.5

где M_0 — изгибающий момент только от поперечной нагрузки. Суммарные напряжения определяют по известной формуле

$$\sigma = -F/A \pm M_0/W_x. \quad (X.20)$$

Однако с возрастанием гибкости стержня влиянием прогиба на увеличение изгибающего момента от действия продольной силы пренебрегать уже нельзя.

Задача определения деформаций и внутренних усилий при продольно-поперечном изгибе может быть решена и точно, и приближенно.

Рассмотрим точное решение задачи (рис. X.5). Имея в виду малые деформации, используем дифференциальное уравнение изгиба стержня (X.2).

Составим уравнение изгиба только для левой половины балки, так как балка симметрична:

$$EI_x v'' = M = -Fv - Pz/2, \quad (X.21)$$

или $v'' + \alpha^2 v = -Pz/(2EI_x)$, где

$$\alpha^2 = F/EI_x. \quad (X.22)$$

Решение этого дифференциального уравнения складывается из решения уравнения без правой части $v = B \sin \alpha z + C \cos \alpha z$ и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение, как легко проверить подстановкой, имеет вид $v^* = -Pz/(2F)$. Таким образом,

$$v = B \sin \alpha z + C \cos \alpha z - Pz/(2F); \quad v' = B\alpha \cos \alpha z - C\alpha \sin \alpha z - P/(2F).$$

Для определения постоянных B и C имеем следующие условия:

$$1) v_{z=0} = 0; \quad 2) v'_{z=l/2} = 0.$$

Из первого условия получим $C=0$, а из второго $B = P/(2F\alpha \cos \alpha l/2)$. Следовательно,

$$v = \frac{P}{2\alpha F \cos \alpha l/2} \sin \alpha z - Pz/(2F). \quad (X.23)$$

Максимальный прогиб

$$v_{\max} = \frac{P}{2\alpha F} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \right). \quad (X.24)$$

Уравнение углов поворота

$$v' = \frac{P}{2F \cos \alpha l/2} \left(\cos \alpha z - \cos \frac{\alpha l}{2} \right);$$

$$v'_{\max} = \frac{P(1 - \cos \alpha l/2)}{2F \cos \alpha l/2} \quad (\text{при } z=0). \quad (X.25)$$

Уравнение для кривизны

$$v'' = -P\alpha \sin \alpha z / (2F \cos \alpha l/2).$$

Уравнение для изгибающих моментов

$$M = EIv'' = -\frac{EIP\alpha \sin \alpha z}{2F \cos \alpha l/2} = -\frac{P \sin \alpha z}{2\alpha \cos \alpha l/2}.$$

Максимальный изгибающий момент (при $z=l/2$)

$$M_{\max} = -\frac{P}{2\alpha} \operatorname{tg} \alpha l/2. \quad (X.26)$$

Наибольшие напряжения от сжатия и изгиба

$$\sigma = -F/A - M/W_x = -F/A - [P/(2\alpha)] \operatorname{tg} \alpha l/2. \quad (X.27)$$

Как видно из этих формул, по мере приближения $\alpha l/2$ к значению $\pi/2$ прогибы и напряжения стремятся к бесконечности, т. е. происходит потеря устойчивости стержня. Этому соответствует значение критической силы

$$F_{cr} = \pi^2 EI_x / l^2,$$

которую иногда называют **эйлеровой критической силой**.

Это имеет место в том случае, если напряжения в момент потери устойчивости не превосходят предела пропорциональности (например, при малой поперечной нагрузке). При более значительной поперечной нагрузке до потери устойчивости прои-

зойдет исчерпание несущей способности стержня, после того как напряжения в наиболее опасных точках достигнут предела текучести. Поэтому определение критической нагрузки сжато-изогнутого стержня в плоскости действия поперечной нагрузки потребует рассмотрения упругопластических деформаций, что выходит за рамки настоящего курса.

При сложной нагрузке уравнение (X.21) пришлось бы составлять и интегрировать для каждого участка балки. Число постоянных интегрирования равнялось бы удвоенному числу участков. Количество вычислений сильно возросло бы. Поэтому в таких случаях обычно применяют приближенный способ решения.

При нагрузке, симметричной относительно середины (или близкой к симметричной), прогибы определяют по формуле

$$v = v_0 C, \quad (X.28)$$

где v_0 — прогиб балки от одной поперечной нагрузки; C — поправочный коэффициент, равный

$$C = 1 / (1 - F / F_{cr}) \quad (X.29)$$

(здесь F_{cr} — критическая сила).

Зная прогиб балки в сечении, можно найти наибольшие напряжения по формуле

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_0 + M_f}{W_x} = -\frac{F}{A} - \frac{M_0}{W_x} - \frac{Fv}{W_x (1 - F / F_{cr})}, \quad (X.30)$$

где M_0 — изгибающий момент в сечении от одной поперечной нагрузки; $M_f = Fv$ — изгибающий момент в сечении от осевой силы.

Из формулы (X.27) или (X.30) следует, что напряжения возрастают быстрее нагрузки. Действительно, если допустить, что поперечная и осевая нагрузки возрастают пропорционально какому-либо одному и тому же параметру, скажем, в n раз, то v_0 возрастает тоже в n раз и последнее слагаемое формулы (X.30) возрастает не пропорционально n , а значительно быстрее. Поэтому расчет на прочность при продольно-поперечном изгибе нельзя вести по допускаемым напряжениям. Расчет ведут по **предельным нагрузкам**, определяя значения сил, при которых напряжение в опасной точке поперечного сечения достигает предела текучести. Разделив это значение на требуемый коэффициент запаса прочности, находят допускаемую нагрузку.

При проверке прочности стержня определяют действительный коэффициент запаса прочности и сравнивают его с требуемым. Определение действительного коэффициента запаса прочности производят, принимая, что формула (X.30) справедлива вплоть до наступления текучести и в процессе возрастания

внешних сил соотношение между поперечной и продольной нагрузками остается неизменным. (Такое нагружение называют простым.) При этих предпосылках на основе формулы (X.30) можно записать

$$\sigma_y = Fn/A + M_0n/W_x + Fnv_0n/[W_x(1 - nF/F_{cr})], \quad (X.31)$$

где n — число, показывающее, во сколько раз должны возрасти внешние силы, чтобы напряжение в опасной точке стало равным пределу текучести, иными словами — **действительный коэффициент запаса прочности по нагрузкам**. Из формулы (X.31), решая соответствующее квадратное уравнение, находят n .

Вместо приближенной формулы (X.31) можно пользоваться более точной формулой, получаемой на основе формулы (X.27):

$$\sigma_y = \frac{Fn}{A} + \frac{Pn}{2\sqrt{Fn/(EI)}} \operatorname{tg} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{Fn}{EI}} \right). \quad (X.32)$$

Запас прочности n определяется из этой формулы путем подбора.

Кроме расчета на прочность, сжато-изогнутые стержни рассчитывают на жесткость, а также на продольный изгиб из плоскости действия поперечной нагрузки по формулам § 84—88.

Пример X.4. Проверить прочность и жесткость балки, показанной на рис. X.5, с учетом собственного веса при следующих данных: балка выполнена из двутавра № 18а, имеющего $A = 25,4 \text{ см}^2 = 25,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $W_x = 159 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $I_x = 1430 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$; поперечная нагрузка $P = 5 \text{ кН}$, сжимающая $F = 0,2 \text{ МН}$; вес 1 м балки = 199 Н, требуемый коэффициент запаса прочности $n_{adm} = 1,7$; допускаемый прогиб $f_{adm} = l/400$. Длина балки 4 м.

Решение.

1. Расчет на прочность. Учитывая, что нагрузка симметрична относительно середины балки, применяем приближенное решение. Используя формулы гл. VI, определяем наибольший изгибающий момент (в середине пролета) от поперечной нагрузки:

от сосредоточенной силы

$$M_f = \frac{Pl}{4} = \frac{5 \cdot 4}{4} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

от собственного веса

$$M_q = \frac{ql^2}{8} = \frac{199 \cdot 4^2}{8} = 398 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,398 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Суммарный изгибающий момент

$$M_0 = 5 + 0,398 = 5,398 \text{ кН} \cdot \text{м} = 5,398 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Наибольшие напряжения без учета момента от действия сжимающей силы F

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_0}{W_x} = -\frac{0,2}{25,4 \cdot 10^{-4}} - \frac{5,398 \cdot 10^{-3}}{159 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= -78,8 - 33,9 = -112,7 \text{ МПа.}$$

Определим теперь напряжения, возникающие от дополнительного момента, вызванного действием осевой силы. Для этого вычислим наибольший прогиб от поперечной нагрузки, используя формулы гл. VII: от сосредоточенной силы $v_f = Fl^3 / (48EI_x)$; от равномерно распределенной нагрузки $v_q = 5ql^4 / (384EI_x)$; суммарный прогиб

$$v_{tot} = \frac{l^3}{48EI_x} \left(F + \frac{5}{8} ql \right) =$$

$$= \frac{4^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} \left(5 \cdot 10^{-3} + \frac{5}{8} 199 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \right) = 0,256 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Эйлера критическая сила

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}}{4^2} = 1,756 \text{ МН.}$$

Поправочный коэффициент

$$c = 1 / \left(1 - \frac{F}{F_{cr}} \right) = 1 / (1 - 0,2 / 1,756) = 1,05.$$

Дополнительные напряжения от момента, вызванного действием осевой силы F :

$$\sigma = -Fv_{0c} / W_x = 0,2 \cdot 0,256 \cdot 10^{-2} \cdot 1,05 / (159 \cdot 10^{-6}) = -3,4 \text{ МПа.}$$

Суммарные напряжения

$$\sigma = -112,7 - 3,4 = -116,1 \text{ МПа.}$$

Запас прочности по формуле (X.31) определяем путем подбора: $n = 1,90 > n_{adm}$. Следовательно, прочность балки обеспечена.

2. Расчет на жесткость. Максимальный прогиб

$$v = v_{0c} = 0,256 \cdot 10^{-2} \cdot 1,05 = 0,269 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,269 \text{ см.}$$

Допускаемый прогиб

$$[f] = l / 400 = \frac{400}{400} = 1 \text{ см.}$$

Следовательно, $v < [f]$, т. е. жесткость балки обеспечена.

§ 91. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

При решении многих задач устойчивости, особенно сложных, весьма эффективными являются энергетические методы, один из которых сейчас и рассмотрим.

При достижении сжимающей силой критического значения стержень может немного изогнуться (рис. X.6).

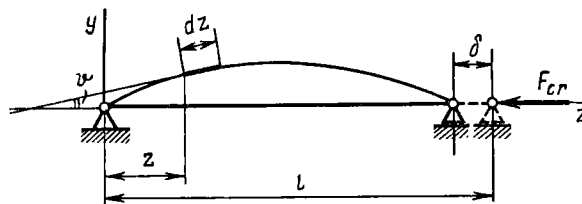


Рис. X.6

Примем для определенности, что $I_x < I_y$, тогда стержень изогнется в плоскости чертежа. При этом внешней силой F_{cr} будет совершена работа, которая перейдет в потенциальную энергию изгиба стержня, определяемую по формуле [VI.22]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dz}{EI_x},$$

или

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x v''^2 dz, \quad (X.33)$$

так как $M = EI_x v''$.

Работа сжимающей силы

$$W_j = F_{cr} \delta, \quad (X.34)$$

где δ — перемещение точки приложения силы F_{cr} .

При вычислении работы W_j множитель $1/2$ отсутствует, поскольку потеря устойчивости характеризуется именно тем, что форма равновесия меняется при постоянном значении внешних сил.

Перемещение δ может быть определено как разность между длиной l и проекцией изогнутой оси стержня на прямую, соединяющую опоры. Очевидно (рис. X.6).

$$d\delta = dz - dz \cos \vartheta = \frac{dz}{2} \sin^2 \vartheta \approx \frac{1}{2} \vartheta^2 = \frac{1}{2} v'^2.$$

(По малости деформаций принимается $\sin \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta = \vartheta = v'$.)
Поэтому

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz. \quad (\text{X.35})$$

Потенциальная энергия сжимающей силы

$$U_i = -W_i = -F_{cr} \delta.$$

Полная потенциальная энергия стержня

$$V = U + U_i, \quad (\text{X.36})$$

или

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x v''^2 dz - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz. \quad (\text{X.37})$$

Приведем теперь одну из важнейших теорем механики деформируемого тела, на которой основан эффективнейший и весьма общий метод решения разнообразных технических задач, в частности задач об устойчивости упругих форм равновесия.

Теорема Лагранжа — Дирихле*:

если система находится в устойчивом равновесии, ее полная потенциальная энергия обладает минимумом по сравнению со всеми соседними положениями системы, отличающимися от исходного бесконечно малыми перемещениями.

Эта теорема предоставляет в наше распоряжение необходимое число уравнений вида $dV/dX_i = 0$, что дает возможность решать задачи со многими неизвестными параметрами X_i . Теорема справедлива как для линейно-деформируемых, так и для нелинейно-деформируемых систем.

Задаваясь той или иной подходящей функцией v , удовлетворяющей заданным граничным условиям, можно приближенно определить критическую силу.

При выборе функции v кинематические граничные условия (прогибы, углы поворота сечений) должны быть удовлетворены обязательно. Статическим граничным условиям (изгибающим моментам, поперечным силам) удовлетворять не обязательно, однако для получения более точных результатов — крайне желательно.

* Эта теорема является наиболее общей теоремой теории упругости, строительной механики и сопротивления материалов. Доказательство этой теоремы приводится в курсах теории упругости и строительной механики.

Более точные результаты получаются, если энергию изгиба вычислять не по формуле (X.33), а по формуле (VI.22). Это объясняется тем, что уравнением кривой v , от которой зависит значение M , можно задаться с лучшим приближением, чем уравнением для v'' .

При определении критической силы для ломаных стержней (рис. X.7) в качестве подходящего деформированного состояния рекомендуется выбрать состояние, вызванное действием какой-либо подходящей нагрузки, например горизонтальной силы P .

Пример X.5. Энергетическим методом определить критическую силу для стержня постоянного сечения, показанного на рис. X.6.

Решение. Принимаем для изогнутой оси уравнение параболы

$$v = Cz(l - z).$$

Это уравнение удовлетворяет кинематическим условиям $v_{z=0} = 0$, $v_{z=l} = 0$, но не удовлетворяет статическим граничным условиям, так как $v'' = \text{const}$, т. е. изгибающий момент постоянен по длине стержня, тогда как на самом деле он увеличивается от концов балки к ее середине. Вычисляя энергию по формуле (X.37) и используя условие $\frac{dV}{dC} = 0$, найдем $F_{cr} = 12EI_x/l^2$ вместо точного значения

$$F_{cr} = \pi^2 EI_x/l^2 \approx 9,87EI_x/l^2.$$

Если энергию изгиба вычислить не по формуле (X.33), а по формуле (VI.22), то получим $F_{cr} = 10EI_x/l^2$, что лишь на 1,3% выше точного значения. (При вычислении принимаем $M = Fv$.)

Следует отметить, что критические силы, определяемые энергетическим методом, всегда получаются больше действительных.

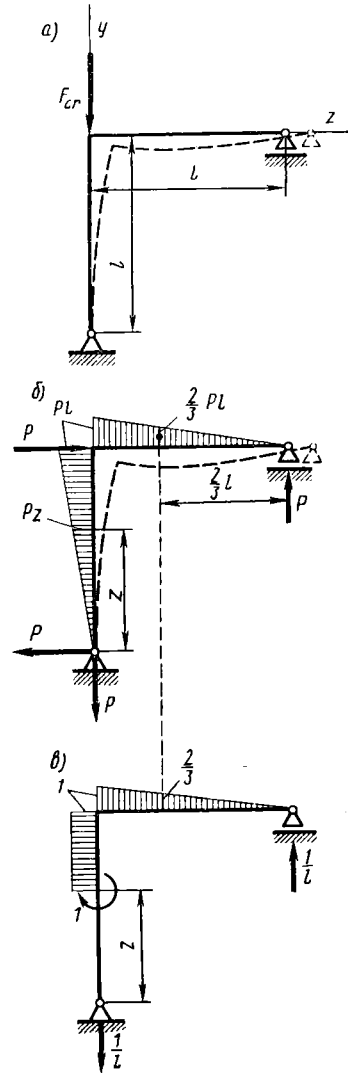


Рис. X.7

Примем теперь для изогнутой оси уравнение

$$v = C \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Это уравнение удовлетворяет и кинематическим и статическим условиям, так как на концах стержня прогибы и изгибающие моменты получаются равными нулю в соответствии с действительностью.

Вычисляем:

$$v' = C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l}; \quad v'' = -\frac{C\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l};$$

$$\int_0^l v'^2 dz = \frac{C^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{C^2 \pi^2}{2l};$$

$$\int_0^l v''^2 dz = \frac{C^2 \pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{C^2 \pi^4}{2l^3}.$$

Вычисляя V по формуле (X.37) и используя условие $\frac{dV}{dC} = 0$, получим

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2},$$

т. е. точное значение. Точное значение критической силы получилось потому, что мы задались точным выражением для изогнутой оси.

Пример X.6. Определить F_{cr} для сжатого стержня, у которого один конец зашлеплен, а другой свободен (см. рис. X.2).

Решение. Представим упругую линию в виде функции с двумя параметрами $v = Bz^2 + Cz^4$. (Координата z отмеряется от зашлепленного конца.) Вычисляем полную потенциальную энергию:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} EI \int_0^l v''^2 dz - \frac{1}{2} F \int_0^l v'^2 dz = \\ &= 2EI \left(B^2 + 4BCl^2 + \frac{36}{5} C^2 l^4 \right) - \\ &- 2Fl^3 \left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{4}{5} BC l^4 + \frac{4}{7} C^2 l^6 \right). \end{aligned}$$

Приравняв нулю производные $\frac{\partial V}{\partial B} = 0$ и $\frac{\partial V}{\partial C} = 0$ (на основании теоремы Лагранжа — Дирихле), получим

$$(EI - Fl^2/3) B - (2EI l^2 - 2Fl^4/5) C = 0;$$

$$(EI - Fl^2/5) B - (18EI l^2 - 2Fl^4/7) C = 0.$$

Если принять $B \neq 0$ и $C \neq 0$, то определитель, составленный из коэффициентов при B и C , должен быть равен нулю:

$$\left(EI - \frac{F}{3} l^2\right) \left(\frac{18}{5} EI l^2 - \frac{2}{7} F l^4\right) - \left(2EI l^2 - \frac{2F l^4}{5}\right) \left(EI - \frac{F}{5} l^2\right) = 0,$$

откуда получим критическую силу

$$F_{cr} = 2,5EI/l^2.$$

Ошибка по отношению к точному значению $F_{cr} = \pi^2 EI/(4l^2)$ составляет лишь 1,2%.

Если бы мы ограничились функцией с одним параметром B , то получили бы $F_{cr} = 3EI/l^2$, т. е. с ошибкой, по сравнению с точным значением равной 20%.

Пример X.7. Определить F_{cr} для стержня, показанного на рис. X.8.

Решение. Принимаем, что стержень при потере устойчивости изгибается по синусоиде $v = f \sin \pi z/l$. Это уравнение удовлетворяет и кинематическим и статическим условиям на концах стержня. Тогда изгибающий момент будет изменяться также по синусоиде:

$$v = f \sin \frac{\pi z}{l}; \quad v' = \frac{\pi}{l} f \cos \frac{\pi z}{l}; \quad v'' = -\frac{\pi^2 f^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi z}{l};$$

$$M = F_{cr} v; \quad M^2 = F_{cr}^2 f^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l}.$$

Вычисляем энергию изгиба:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dz}{EI_x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \frac{M^2 dx}{2EI} + \frac{1}{2} \int_{l/2}^l \frac{M^2 dz}{1,6EI} = 0,14 \frac{F_{cr} f^2 l}{EI}. \end{aligned}$$

Вычисляем работу сжимающей силы:

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{1}{2} F_{cr} \int_0^l v'^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} F_{cr} \int_0^l \frac{\pi^2 f^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{F_{cr} \pi^2 f^2}{4l}. \end{aligned}$$

Вычисляем полную энергию:

$$V = U - W_f = 0,14 F_{cr}^2 f^2 l / (EI) - F_{cr} \pi^2 f^2 / (4l).$$

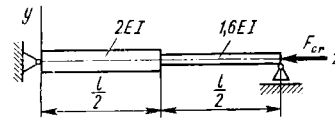


Рис. X.8

Из условия $\frac{dV}{df} = 0$ получим $F_{cr} = \pi^2 EI / (0,56l^2) = 17,65 EI / l^2$. Точное значение $F_{cr} = 17,62 EI / l^2$.

Пример X.8. Определить F_{cr} для ломаного стержня, показанного на рис. X.7, а.

Решение. Принимаем, что стержень при потере устойчивости деформируется примерно так же, как и при действии горизонтальной силы P . Строим эпюру M от действия силы P (рис. X.7, б) и вычисляем потенциальную энергию изгиба по формуле (VI.22) или по правилу Верещагина, перемножая эпюру M саму на себя:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int_0^l \frac{M^2 dS}{EI_x} = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(lPl \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \right) = \frac{P^2 l^3}{3EI_x}$$

Для вычисления работы сжимающей силы F_{cr} используем формулу (X.34):

$$W = F_{cr} \delta = \frac{F_{cr}}{2} \int_0^l v'^2 dz$$

Угол поворота $v' = \theta$ в текущем сечении z вычисляем по методу Мора, прикладывая в сечении z единичный момент, строя эпюру M (рис. X.7, в) и перемножая эпюру M от действия силы P на эпюру M от действия единичного момента:

$$\theta = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} lPl \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2EI} (Pl + Pz) (l-z) \cdot 1 = \frac{5Pl^2}{6EI} - \frac{Pz^2}{2EI}$$

$$W = \frac{F_{cr}}{2} \int_0^l \frac{P^2}{E^2 l^2} \left(\frac{5l^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{F_{cr} \cdot 16,8 P^2 l^3}{72}$$

Вычисляем $V = U - W$. Из условия $\frac{\partial V}{\partial P} = 0$ получим

$$F_{cr} = 1,43 EI / l^2$$

Точное значение $F_{cr} = 1,422 EI / l^2$.

Рассмотренный в этих примерах метод расчета, основанный на теореме Лагранжа — Дирихле, носит название **метода Ритца**.

ГЛАВА XI

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

§ 92. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

До сих пор мы изучали действие на детали сооружений статических нагрузок. Как известно из предыдущего, статические нагрузки от нуля до конечных значений изменяются настолько медленно, что ускорения, получаемые при этом элементами сооружения, пренебрежимо малы. Однако весьма часто нагрузки имеют динамический характер, так как изменяются во времени с большой скоростью. Действие таких нагрузок сопровождается колебаниями сооружений и их отдельных элементов.

Напряжения, возникающие при колебаниях деталей, могут во много раз превосходить по своему значению напряжения от действия статических нагрузок.

Расчет деталей сооружений на динамическую нагрузку более сложен, чем расчет на статическую нагрузку. Трудность заключается, с одной стороны, в более сложных методах определения внутренних усилий и напряжений, возникающих от действия динамической нагрузки, и, с другой — в более сложных методах определения механических свойств материалов при динамической нагрузке.

Например, при действии ударной нагрузки (т. е. нагрузки чрезвычайно малой продолжительности) многие материалы, которые при статическом действии нагрузок оказывались пластичными, работают как хрупкие; при действии многократно повторяющейся переменной нагрузки прочность материалов резко снижается.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на известном из теоретической механики принципе Даламбера. Согласно этому принципу, всякое движущееся тело может рассматриваться как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение и направленную в сторону, противоположную ускорению. Поэтому в тех случаях, когда известны силы инерции, без всяких ограничений можно применять метод сечений и для определения внутренних усилий использовать уравнения равновесия.

В тех же случаях, когда определение сил инерции затруднительно, как, например, при ударе, для определения динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии.

§ 93. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАВНОУСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Во многих случаях ускорения, с которыми перемещаются детали машин, известны. Динамические напряжения в этих случаях вычисляются без затруднений. Рассмотрим несколько примеров.

Пример XI.1. Груз весом G поднимают вверх с ускорением (рис. XI.1). Определить напряжение в канате, пренебрегая его весом.

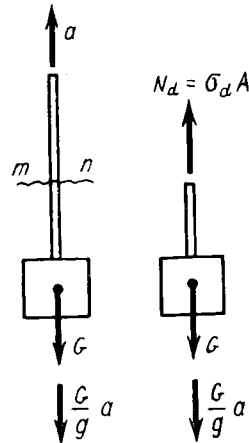


Рис. XI.1

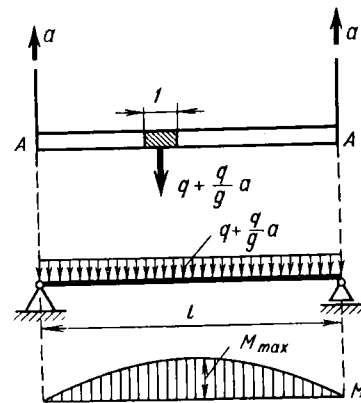


Рис. XI.2

Решение. Прикладываем к грузу силу инерции, равную $ma = Ga/g$ и направленную вниз. Применим метод сечений. Делаем разрез $n-n$ и отбрасываем верхнюю часть каната. Усилие в канате обозначаем N_d^* . Так как напряжения при центральном растяжении равномерно распределены по сечению, то можем принять, что $N_d = \sigma_d A$, где σ_d — искомое динамическое напряжение в канате.

Проецируя все силы, в том числе и силы инерции, на вертикальную ось, получаем

$$\sigma_d A - G(1 + a/g) = 0,$$

откуда

$$\sigma_d = \frac{G}{A} (1 + a/g) = \sigma_{st} K_d,$$

* Индекс d от *dynamic* (англ.) — динамический.

где $\sigma_{st} = \frac{G}{A}$ — напряжение при статическом действии груза*; $K_d = 1 + a/g$ — динамический коэффициент.

Таким образом, динамические напряжения во многих случаях могут быть выражены через статические напряжения и динамический коэффициент. Это особенно удобно, так как динамический коэффициент часто приходится определять опытным путем.

Пример XI.2. Стержень, вес l м длины которого равен q , поднимают с помощью двух нитей, привязанных к его концам (рис. XI.2). Движение поступательное с ускорением a . Определить напряжения в стержне.

Решение. Прикладываем к каждому элементу стержня длиной, равной единице, силу инерции qa/g . Видим, что эта задача эквивалентна задаче о простой балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q + qa/g$.

Наибольший изгибающий момент будет в сечении посередине балки:

$$M_d = \frac{(q + qa/g) l^2}{8} = \frac{ql^2}{8} (1 + a/g) = M_{st} K_d,$$

где $M_{st} = ql^2/8$ — изгибающий момент от статической равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q ; $K_d = 1 + a/g$ — динамический коэффициент.

Наибольшее динамическое напряжение определяется по обычной формуле изгиба

$$\sigma_d = \frac{M_d}{W_x} = \sigma_{st} K_d.$$

§ 94. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УДАРЕ

Рассмотрим случай **продольного удара** груза по неподвижному телу. Пусть груз весом G падает с высоты h на неподвижный стержень (рис. XI.3, а). Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения $v = \sqrt{2gh}$. Эта скорость за очень короткий промежуток времени удара, исчисляемый тысячными или сотыми долями секунды, упадет до нуля. Благодаря большому ускорению (замедлению) возникает значительная сила инерции, которая определяет действие удара.

Однако теоретически трудно установить закон изменения скорости, а следовательно, и силу инерции. Здесь применяется другой путь, основанный на приближенном использовании закона сохранения энергии и на следующих допущениях:

1) напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности, так что закон Гука при ударе сохраняет свою силу;

* Индекс *st* от *statical* (англ.) — статический.

- 2) тела после удара не отделяются друг от друга;
 3) масса ударяемого стержня считается малой по сравнению с массой ударяющего тела, поэтому в расчет не принимается;
 4) потерей части энергии, перешедшей в тепло и в энергию колебательного движения соударяющихся тел, пренебрегаем.
 Приравняем работу падающего груза потенциальной энергии деформации стержня.

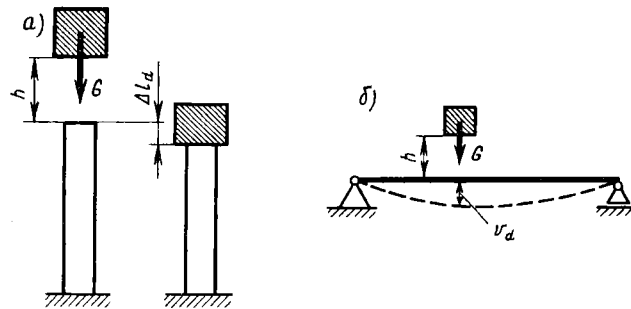


Рис. XI.3

Работа, совершаемая весом падающего груза,

$$W = G (h + \Delta l_d),$$

где Δl_d — перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Потенциальная энергия деформации при сжатии (см. § 18)

$$U = \Delta l_d^2 EA / (2l).$$

Из этих двух уравнений получаем

$$G (h + \Delta l_d) = \Delta l_d^2 EA / (2l),$$

или

$$\Delta l_d^2 EA - G 2l \Delta l_d - G h 2l = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на EA , получим

$$\Delta l_d^2 - \frac{Gl}{EA} 2\Delta l_d - \frac{Gl}{EA} 2h = 0.$$

Но $Gl/EA = \Delta l_{st}$ — укорочение стержня от статически приложенной нагрузки G . Тогда

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{st} \Delta l_d - 2\Delta l_{st} h = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно Δl_d , получим

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \pm \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2h\Delta l_{st}}$$

Оставляя знак плюс (так как $\Delta l_d > \Delta l_{st}$), получаем окончательно

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \Delta l_{st} K_d, \quad (IX.1)$$

где K_d — динамический коэффициент.

Разделив обе части последнего уравнения на длину стержня и умножив на модуль упругости E , перейдем на основании закона Гука от деформаций к напряжениям:

$$\sigma_d = \sigma_{st} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \sigma_{st} K_d. \quad (XI.2)$$

Из этих формул видно, что динамические напряжения и перемещения зависят от статической деформации ударяемого тела. Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамические напряжения.

Вот почему для смягчения удара применяют прокладки (резиновые, пружинные), дающие большие деформации.

При сжимающем ударе во избежание продольного изгиба динамические напряжения не должны превосходить критических напряжений (см. гл. X).

Аналогичный вид имеют формулы и для случая поперечного (изгибающего) удара, только в этом случае вместо Δl_{st} следует принимать статический прогиб балки в месте удара — v_{st} , а вместо Δl_d динамический прогиб — v_d (рис. XI.3, б).

Частные случаи

1. Если $h=0$, т. е. имеет место **внезапное приложение нагрузки**, то из формул (XI.1) и (XI.2) получим $\Delta l_d = 2\Delta l_{st}$; $\sigma_d = 2\sigma_{st}$.

При внезапном приложении нагрузки деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки.

2. Если высота падения h значительно больше статической деформации Δl_{st} , то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}} \approx \sqrt{2h/\Delta l_{st}}. \quad (XI.2a)$$

Пример XI.3. На стальную двутавровую балку № 27а пролетом 3 м падает посередине пролета груз $G=1$ кН с высотой $h=10$ см = = 0,1 м. Момент инерции сечения $J_x = 5500 \cdot 10^{-8}$ м⁴, момент сопротивления $W_x = 407 \cdot 10^{-6}$ м³ (из таблиц сортамента); $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Определить наибольший прогиб балки и максимальные напряжения в ее поперечном сечении.

Решение. Вычисляем статический прогиб балки под грузом по формуле (VII.23):

$$v_{st} = \frac{Gl^3}{48EI} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 0,0048 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,0048 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 10/0,0048} = 64.$$

В данном случае динамический эффект падающего груза в 64 раза превосходит его статический эффект.

Вычисляем статическое напряжение от груза G .

Наибольший изгибающий момент будет в среднем сечении балки:

$$M = \frac{Gl}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4} = 0,75 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Наибольшее статическое напряжение

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W_x} = \frac{0,75}{407 \cdot 10^{-6}} = 1860 \text{ кПа} = 1,86 \text{ МПа.}$$

Наибольшее динамическое напряжение

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d = 1,86 \cdot 64 = 119 \text{ МПа.}$$

Из этого примера видно, насколько опасными по своему действию являются динамические нагрузки. К этому добавляется еще и то обстоятельство, что допускаемые напряжения при ударе принимают более низкими, чем при действии статических нагрузок.

§ 95. ВНЕЦЕНТРЕННЫЙ УДАР

Значительно бóльший практический интерес представляет **внецентренный удар**, с которым на практике обычно и приходится встречаться.

Например, при забивке свай в грунт вследствие даже небольшого взаимного перекоса свай и ударяющего тела удар становится нецентральным (рис. XI.4, а).

Сохраним те же допущения о характере удара, что и при центральном ударе.

Поскольку при внецентренном ударе кроме деформаций и напряжений растяжения (сжатия) возникают еще деформации и напряжения изгиба, примем гипотезу о том, что изогнутая ось стержня при ударе совпадает по форме с изогнутой осью при статическом действии нагрузки.

Сделанные допущения приемлемы при небольших скоростях удара.

Вычисляем работу веса G груза, падающего с высоты h :

$$W = G (h + \delta_d), \quad (\text{XI.3})$$

где δ_d — перемещение в точке удара C (рис. XI.5). Это переме-

щение может быть представлено в виде суммы:

$$\delta_d = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \quad (X1.4)$$

где $\delta_1 = F_d l / (EA)$ — укорочение оси стержня от действия продольной силы F_d ; δ_2 — укорочение оси стержня вследствие его искривления. При нижнем заделанном конце стержня оно может быть определено по формуле (X.35):

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz. \quad (X1.5)$$

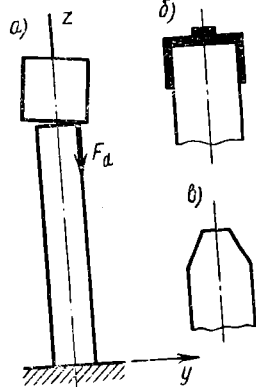


Рис. XI. 4

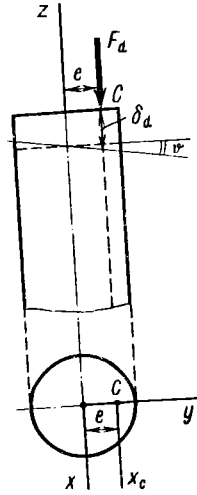


Рис. XI.5

В частном случае, когда точка удара лежит на одной из главных линий осей сечения, имеем (см. пример VII.8)

$$v' = M_d z / (EI_x) = F_d e z / (EI_x). \quad (X1.6)$$

Следовательно,

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz = \frac{F_d^2 e^2 l^3}{6E^2 I_x^2}. \quad (X1.7)$$

Здесь e — эксцентриситет силы удара относительно главной центральной оси x .

Перемещение δ_3 есть перемещение точки удара вследствие поворота сечения:

$$\delta_3 = e \operatorname{tg} \vartheta \approx e \vartheta, \quad (X1.8)$$

где ϑ — угол поворота верхнего сечения стержня (по малости деформаций принимается $\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta$):

$$\vartheta = M_d l / (EI_x) = F_d e l / (EI_x). \quad (\text{XI.9})$$

Следовательно,

$$\delta_3 = F_d e^2 l / (EI). \quad (\text{XI.10})$$

При вычислении перемещений δ_2 и δ_3 эффект продольно-поперечного изгиба не учитываем, т. е. принимаем стержень достаточно большой жесткости.

Окончательно формула (XI.3) принимает вид

$$W = G \left(h + \frac{F_d l}{EA} + \frac{F_d^2 e^2 l^3}{6E^2 I_x^2} + \frac{F_d e^2 l}{EI_x} \right). \quad (\text{XI.11})$$

Вычисляем потенциальную энергию деформации стержня:

$$U = \frac{1}{2} \frac{F_d^2 l}{EA} + \frac{1}{2} \frac{M_d^2 l}{EI_x}. \quad (\text{XI.12})$$

Имея в виду, что $M_d = F_d e$, получим

$$U = \frac{F_d^2 l (I_x + F e^2)}{2EIA} = \frac{F_d^2 I_{x_C}}{2EI_x A}, \quad (\text{XI.13})$$

где $I_{x_C} = I_x + A e^2$ — момент инерции сечения относительно оси x_C , проходящей параллельно оси x через точку удара C .

На основании закона сохранения энергии

$$W = U.$$

После преобразований получим следующее квадратное уравнение для определения силы удара F_d :

$$6G i_x^2 h EA^2 + 6G I_{x_C} F_d + F_d^2 (\Delta l_{st} e^2 \lambda^2 A - 3I_{x_C} l) = 0, \quad (\text{XI.14})$$

где $i_x = \sqrt{I_x/A}$ — радиус инерции сечения относительно оси x ; $\Delta l_{st} = Gl/(EA)$ — статическое укорочение стержня; $\lambda = l/i_x$ — гибкость стержня относительно оси x .

Определив из этого уравнения F_d , можно по формуле (XI.4) определить перемещение в точке удара. Напряжение при сжимающем ударе находят по формуле

$$\sigma_d = -F_d/A \pm M_d/W_x = F_d (-1/A \pm e/W_x). \quad (\text{XI.15})$$

Если деформации стержня малы по сравнению с высотой падения h , то, приравнявая работу силы G , равную $W = Gh$,

потенциальной энергии деформации (XI.13), получим

$$Gh = F_d^2 l_{xC} / (2EI_x A), \quad (XI.16)$$

откуда

$$F_d = G \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}} \frac{I_x}{l_{xC}}} = F_{st} K_d, \quad (XI.17)$$

где K_d — динамический коэффициент:

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}} \frac{I_x}{l_{xC}}}. \quad (XI.17a)$$

Напряжения равны

$$\sigma_d = F_d (-1/A \pm e/W_x) = F_{st} K_d (-1/A \pm e/W_x) = \sigma_{st} K_d. \quad (XI.18)$$

Аналогичным способом можно получить решение задачи и в общем случае удара, когда точка удара не лежит ни на одной из главных осей поперечного сечения стержня.

Пример XI.4. Определить силу удара и напряжения от падающего груза весом G в стержне круглого сечения для двух случаев: 1) центрального удара, 2) внецентренного удара при $e=r$.

Решение. Динамические коэффициенты вычисляем по приближенным формулам, считая, что h велико по сравнению с Δl_{st} .

1. **Центральный удар.** Динамический коэффициент вычисляем по формуле (XI.2a):

$$K'_d = \sqrt{2h/\Delta l_{st}},$$

$$F'_d = F_{st} K'_d = -G \sqrt{2h/\Delta l_{st}}; \quad \sigma'_d = \sigma_{st} K'_d = -\frac{G}{A} \sqrt{2h/\Delta l_{st}}.$$

2. **Внецентренный удар ($e=d/2$).**

K''_d определяем по формуле (XI.17a):

$$\begin{aligned} K''_d &= \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}} \frac{I_x}{I_x + Ae^2}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}} \frac{0,05d^4}{(0,05d^4 + 0,785d^2 \cdot 0,25d^2)}} = \\ &= 0,446 \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}}; \end{aligned}$$

$$F''_d = -F_{st} K''_d = -0,446G \sqrt{2h/\Delta l_{st}};$$

$$\sigma''_d = -K''_d (F_{st}/A + M_{st}/W_x) =$$

$$= -0,446 \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}} \left(\frac{G \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{G \cdot 0,5d \cdot 32}{\pi d^3} \right) = -2,33 \frac{G}{A} \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}}.$$

Сравнивая результаты, видим, что при центральном ударе сила удара в $\frac{F'_d}{F''_d} = 2,24$ раза больше, чем при внецентренном ударе, а напряжения в 0,43 раза меньше $\left(\frac{\sigma'_d}{\sigma''_d} = 0,43\right)$.

Из этого следует, например, что при забивке свай выгодно центрировать удар для того, чтобы увеличить силу удара, погружающую сваю в грунт, и уменьшить динамические напряжения за счет ликвидации изгибающего момента, не оказывающего влияния на погружение сваи.

Для центрирования удара наголовник для сваи следует делать с центрирующим выступом (см. рис. XI.4, б) или заострить конец сваи (см. рис. XI.4, в).

§ 96. ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ УДАРНОЙ НАГРУЗКОЙ (УДАРНАЯ ПРОБА)

Исследования показывают, что скорость деформирования заметно влияет на механические свойства материалов.

На рис. XI.6 показаны две диаграммы растяжения — при статическом нагружении 1 и при динамическом нагруже-

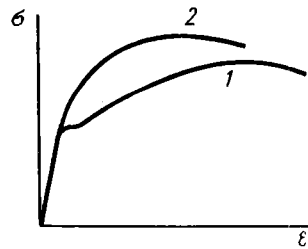


Рис. XI.6

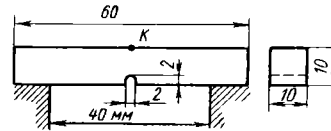


Рис. XI.7

нии 2. Из этих диаграмм видно, что предел текучести и предел прочности при ударном растяжении повышаются. Исследования Н. Н. Давиденкова и других показывают, что предел текучести повышается на 20—70 %, а предел прочности — на 10—30 % по сравнению со статическим растяжением. Пластичность с ростом скорости деформирования убывает. Уже при сравнительно невысоких скоростях нагружения наблюдается склонность к хрупкому разрушению.

Для построения диаграммы ударного растяжения типа диаграммы 2 на рис. XI.6 требуются специальные, очень сложные машины. Обычно применяют другой, более упрощенный способ оценки свойств материалов при действии ударной нагрузки, так называемую *ударную пробу*. Для испытания применяют образцы

стандартной формы. Один из таких образцов показан на рис. XI.7.

В образце посередине делают надрез глубиной 2 мм для того, чтобы поставить материал в наиболее тяжелые условия работы, так как надрез создает концентрацию напряжений.

Образец подвергается ударному разрушению на специальном копре маятникового типа (рис. XI.8). Нож маятника C , поднятый на высоту h_1 , опускаясь, ломает образец, ударяя его в точке K (см. рис. XI.7), и за счет оставшейся кинетической энергии поднимается на высоту $h_2 < h_1$.

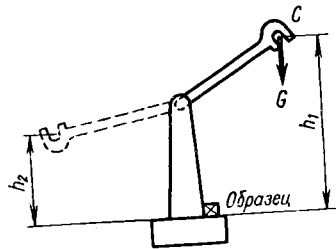


Рис. XI.8

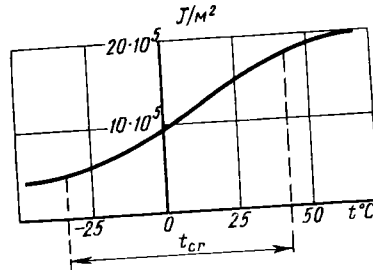


Рис. XI.9

Работа, совершенная маятником, $W = G(h_1 - h_2)$. Она расходуется на разрушение образца, за исключением небольшой ее части ΔW , затрачиваемой на вредные сопротивления (трение в машине, сопротивление воздуха). Эти потери для каждого экземпляра копра известны.

За характеристику способности материала сопротивляться действию ударной нагрузки принимают величину

$$a = W_1 / A, \quad (XI.19)$$

где $W_1 = W - \Delta W$ — работа, затраченная на разрушение образца; A — площадь поперечного сечения образца в месте надреза.

Величина a называется **удельной ударной вязкостью** материала. Чем больше a , тем лучше материал сопротивляется удару, тем более он вязок.

Ударная вязкость a зависит от температуры t , при которой производятся испытания. Для стали Ст3 график зависимости a от t показан на рис. XI.9*. При понижении температуры a уменьшается. Существует интервал температуры t_{cr} , когда a уменьшается особенно быстро. Этот интервал называется **критическим интервалом температуры**.

* На рис. XI.9 буквой J обозначен джоуль.

Область температур левее критического интервала называется областью температурной хрупкости. Как видим, область температурной хрупкости для стали Ст3 соответствует температуре ниже -25°C . При температуре от -20 до $+30^{\circ}\text{C}$ значение a для этой стали составляет $6 \cdot 10^5 - 12 \cdot 10^5$ Дж/м² (Дж/м²).

Отметим для сравнения, что у стеклотекстолитов значение a составляет $1 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^5$ Дж/м². Следовательно, стеклопластики значительно хуже сопротивляются действию ударных нагрузок, нежели малоуглеродистая сталь.

§ 97. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ *

Как уже было отмечено, характерной особенностью динамических нагрузок является возникновение колебаний сооружений и их отдельных элементов.

При колебаниях вследствие наличия ускорений возникают силы инерции, которые могут во много раз превосходить усилия, возникающие в элементах сооружений от действия статических нагрузок. Поэтому динамические нагрузки значительно опаснее статических.

Рассмотрим простейшую задачу теории колебаний — задачу о свободных (или собственных) колебаниях тела, масса которого сосредоточена в одной точке (рис. XI.10). Массу стержня (или пружины), поддерживающей тело, будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массой колеблющегося тела.

В этом случае положение тела, совершающего колебания, полностью определяется одним параметром — перемещением s тела относительно положения статического равновесия.

В этом и аналогичных случаях говорят, что система имеет одну степень свободы.

Число степеней свободы, т. е. число независимых параметров, определяющих положение системы, зависит от принимаемой нами расчетной схемы. Так, если в рассматриваемом случае нельзя было бы пренебрегать массой стержня BC , то пришлось бы ввести бесчисленное множество координат, определяющих положение всех точек стержня BC , т. е. система имела бы бесконечное число степеней свободы.

Чтобы заставить тело колебаться около положения равновесия, удлиним стержень BC на какую-нибудь величину s_0 и предоставим тело самому себе. Оно начнет совершать колебатель-

* В § 97 и 98 учтены требования ГОСТ 24346—80 и 24347—80 «Вибрация».

ные движения в вертикальном направлении (в направлении CB).

Такие колебания, которые совершает система, освобожденная от внешних силовых воздействий и предоставленная самой себе, называются **свободными** (или **собственными**).

Собственные колебания происходят до тех пор, пока со-общенная в начале колебательного процесса энергия не будет полностью израсходована на работу против сил трения о воздух и сил внутреннего трения в материале.

Колебания называются **вынужденными**, если они происходят под действием изменяющихся внешних сил, называемых **вынуждающими**.

При составлении уравнений движения исходят из принципа Даламбера, который состоит в том, что к движущейся с ускорением системе могут быть применены уравнения статики при условии, что в число внешних сил включена фиктивная сила инерции, равная произведению массы на ускорение и направленная против ускорения.

Обозначим отклонение тела от положения равновесия через s . На тело при колебаниях будут действовать следующие силы:

1) реакция со стороны стержня CB , равная на основании закона Гука

$$N = EA s / l = s / s_{11}, \quad (X1.20)$$

где s_{11} — перемещение от силы равной единице, приложенной в точке прикрепления массы;

2) сила инерции, равная произведению массы на ускорение:

$$i = m d^2 s / dt^2. \quad (X1.21)$$

Сумма этих сил должна быть равна нулю:

$$m d^2 s / dt^2 + s / s_{11} = 0, \quad (X1.22)$$

или

$$d^2 s / dt^2 + \omega^2 s = 0, \quad (X1.23)$$

где

$$\omega = \sqrt{1 / (m s_{11})} \quad (X1.24)$$

— угловая частота колебаний (число колебаний за 2π секунд). Уравнение (X1.23) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, однородное, линейное, с постоянными коэффициентами. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$s = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \quad (X1.25)$$

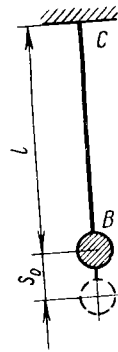


Рис. X1.10

или

$$s = A \sin (\omega t + \varphi), \quad (\text{XI.26})$$

где B_1 , B_2 и A , φ — произвольные постоянные.

Уравнение (XI.26) есть уравнение **гармонического колебания**. В этом уравнении величина A представляет наибольшее отклонение (амплитуду) колеблющейся массы от положения равновесия, так как наибольшее значение $\sin (\omega t + \varphi)$ равно единице. Аргумент $\omega t + \varphi$ называется **фазой колебаний**, а величина φ называется **начальной фазой колебания**, т. е. значение фазы при $t = 0$.

Скорость движущейся массы

$$v = ds/dt = A\omega \cos (\omega t + \varphi). \quad (\text{XI.27})$$

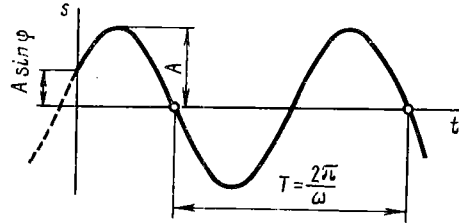


Рис. XI.11

Амплитуда A и начальная фаза φ определяются по начальным условиям движения. Если в начальный момент при $t = 0$ смещение массы было $s = s_0$, а скорость $v = v_0$, то из предыдущих уравнений получим:

$$s_0 = A \sin \varphi; \quad v_0 = A\omega \cos \varphi.$$

Отсюда найдем:

$$A = \sqrt{s_0^2 + v_0^2/\omega^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \omega s_0/v_0, \quad \text{т. е. } \varphi = \operatorname{arctg} \omega s_0/v_0. \quad (\text{XI.28})$$

График колебаний (XI.26) представлен на рис. XI.11. Найдем полный период колебания T , т. е. тот промежуток времени, по истечении которого колеблющаяся масса возвращается в исходное положение. Так как период синуса и косинуса равен 2π , то по истечении времени T фаза колебаний возрастает на 2π , т. е. на основании формулы (XI.26) имеем

$$\omega (t + T) + \varphi - (\omega t + \varphi) = 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega, \quad (\text{XI.29})$$

или, подставляя значение ω из формулы (XI.24), получим

$$T = 2\pi \sqrt{ms_{11}}. \quad (\text{XI.30})$$

Так как в эту формулу не входят ни s_0 , ни v_0 , то период колебания не зависит от начальных условий движения.

Из предыдущей формулы имеем также

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{1/(ms_{11})}, \quad (\text{XI.31})$$

т. е. круговая частота колебаний определяет число полных колебаний, которые совершает масса в течение 2π секунд.

Имея в виду, что $s_{11} = l/(EA)$, получим

$$\omega = \sqrt{EA/(ml)},$$

т. е. частота колебаний тем больше, чем больше жесткость стержня (пружины), и уменьшается с увеличением длины стержня и колеблющейся массы.

Вышеприведенные формулы справедливы и для случая поперечных (изгибных) колебаний стержня при условии, что в этом случае s_{11} будет определяться как прогиб балки от единичной силы, приложенной в точке прикрепления колеблющейся массы.

Как уже отмечено, под действием различных сил сопротивления свободные колебания будут со временем затухать.

Если принять, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения (что приемлемо при небольших скоростях), то при составлении уравнения колебаний в число внешних сил необходимо включить силу сопротивления $b ds/dt$, где b — коэффициент пропорциональности * между силой и скоростью. Тогда вместо уравнения (XI.22) получим

$$m d^2s/dt^2 + b ds/dt + s/s_{11} = 0, \quad (\text{XI.32})$$

или

$$d^2s/dt^2 + 2n ds/dt + \omega^2 s = 0, \quad (\text{XI.33})$$

где

$$2n = b/m; \quad \omega^2 = 1/(ms_{11}). \quad (\text{XI.34})$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$s = Ae^{-nt} \sin(\omega_d t + \varphi), \quad (\text{XI.35})$$

где

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (\text{XI.36})$$

* Коэффициент сопротивления.

График этих колебаний показан на рис. XI.12. Из него видно, что собственные колебания со временем затухают. Частота колебаний ω_d мало отличается от частоты собственных колебаний без затухания, поскольку величина n^2 обычно очень мала по сравнению с ω^2 .

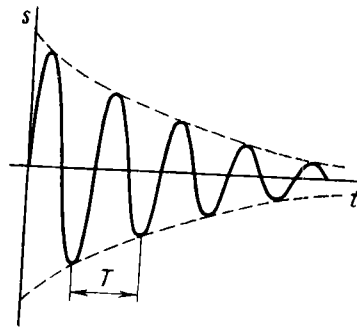


Рис. XI.12

Отношение двух амплитуд, измеренных через один период,

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = e^{-nt} / e^{-n(t+T)} = e^{nT},$$

откуда

$$nT = \ln \frac{s_n}{s_{n+1}} = \Lambda, \quad (XI.37)$$

где Λ — логарифмический декремент колебания; он характеризует скорость затухания собственных колебаний.

§ 98. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. РЕЗОНАНС

Рассмотрим случай, когда на систему с одной степенью свободы действует вынуждающая сила, изменяющаяся по периодическому закону

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t, \quad (XI.38)$$

где F_0 — максимальное значение силы; Ω — угловая частота изменения силы.

Дифференциальное уравнение движения без учета сил сопротивления имеет вид

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t. \quad (XI.39)$$

Интеграл однородного уравнения (т. е. без правой части) нам уже известен из предыдущего параграфа. Частный интеграл будем искать в следующем виде (для случая, когда $\omega \neq \Omega$):

$$s^* = C \sin \Omega t. \quad (XI.40)$$

Подставляя это выражение в уравнение (XI.39), найдем

$$C = F_0 / [m (\omega^2 - \Omega^2)] = F_0 s_{11} / (1 - \Omega^2 / \omega^2) \quad (XI.41)$$

{так как $\omega^2 = 1 / (ms_{11})$ }

Следовательно, решение уравнения (XI.39) имеет вид

$$s = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0 s_{11}}{(1 - \Omega^2/\omega^2)} \sin \Omega t. \quad (\text{XI.42})$$

Первое слагаемое представляет собой собственные колебания, второе — описывает вынужденные колебания.

Так как собственные колебания со временем затухают, то рассмотрим только вынужденные.

Эти колебания происходят с частотой вынуждающей силы Ω и амплитудой

$$C = F_0 s_{11} / (1 - \Omega^2/\omega^2). \quad (\text{XI.43})$$

Учитывая, что произведение $F_0 s_{11}$ представляет собой то перемещение, которое получила бы масса, если бы к ней статически была приложена сила F_0 , получим

$$C = \epsilon_{st} / (1 - \Omega^2/\omega^2) = \epsilon_{st} K_d,$$

где $K_d = 1 / (1 - \Omega^2/\omega^2)$ — динамический коэффициент, показывающий, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического перемещения, вызванного максимальным значением вынуждающей силы.

На рис. XI.13 показан график значений динамического коэффициента (по абсолютному значению). Из этого графика видно, что при значениях частоты вынужденных колебаний Ω , приближающихся к частоте собственных колебаний ω , динамический коэффициент неограниченно возрастает. Например, для случая, когда Ω отличается от ω на 30 %, $K_d \approx 2$.

Рассмотрение вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления показывает, что K_d остается ограниченным даже при $\Omega = \omega$, но имеет при этом максимальное значение.

Явление повышения амплитуды при совпадении частот собственных колебаний и вынуждающей силы носит название **резонанса**, а само совпадение частот называется **условием резонанса**.

Поскольку рост амплитуд сопровождается соответствующим ростом и напряжений, возникающих в колеблющихся элементах, то ясно, что вопросы резонанса при расчете конструкций имеют важнейшее значение.

И действительно, анализ аварий сооружений показывает, что именно колебания с сильно возрастающими амплитудами являются весьма часто главной причиной аварий.

В случае, когда сопоставление частот Ω и ω указывает на опасность резонанса, необходимо путем конструктивных мероприятий увеличить этот разрыв, изменяя Ω или ω . При этом

наиболее целесообразно изменять частоты в сторону увеличения отношения Ω/ω (рис. XI.13), чтобы добиться наиболее заметного снижения K_d .

Этого можно достичь изменением жесткости колебательной системы. Если же конструктор лишен такой возможности, то необходимо прибегнуть к демпфированию конструкции, т. е. применить специальные устройства (виброгасители), увеличивающие рассеяние энергии при колебаниях (демпферы сухого

трения, гидравлические, ударные, резиновые и т. п.). Следует отметить, что кратковременное состояние резонанса, опасности,

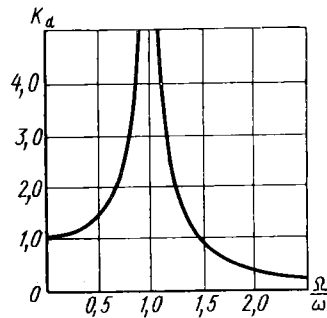


Рис. XI.13

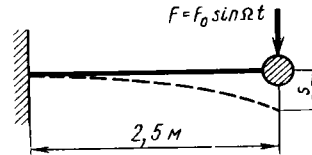


Рис. XI.14

как правило, не представляет, так как на «раскачку» системы требуется определенное время и амплитуда за короткий промежуток времени не успевает достичь больших значений.

Более сложные случаи колебаний (колебания систем с несколькими степенями свободы, колебания систем с непрерывно распределенной массой и др.) рассматриваются в полных курсах сопротивления материалов и в специальных руководствах.

Пример XI.5. На конце балки из двух швеллеров № 12 (рис. XI.14) находится двигатель весом $G = 4000$ Н, создающий вибрационную нагрузку $F = F_0 \sin \Omega t$, при этом $F_0 = 1$ кН, $\Omega = 22$ 1/с, $I_x = 2 \cdot 304 = 608$ см⁴ = $608 \cdot 10^{-8}$ м⁴.

Решение. Массой балки и силами сопротивления пренебрегаем. Определяем частоту собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{1/(ms_{11})}.$$

Находим массу: $m = 4000/9,81 = 408$ кг.

Прогиб конца балки от единичной силы [см. формулу (VII.9)], равной $F = 1$ Н = $m \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$

$$s_{11} = \frac{l^3}{3EI_x} = \frac{2,5^3 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 608 \cdot 10^{-8}} = 0,00428 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

поэтому

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{408 \cdot 0,00428 \cdot 10^{-3}}} = 23,9 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку разница между частотами Ω и ω невелика, возникает опасность резонанса. Для отстройки от резонанса изменим положение двигателя на балке, поместив его на расстояние 2 м от заделки. Тогда получим

$$s_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{2^3 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 608 \cdot 10^{-8}} = 0,0022 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{408 \cdot 0,0022 \cdot 10^{-3}}} = 33,3 \text{ с}^{-1}.$$

Эта частота уже значительно отличается от частоты вынуждающей силы Ω . Определим динамические напряжения. Динамический коэффициент

$$K_d = 1/(1 - \Omega^2/\omega^2) = 1/(1 - 22^2/33,3^2) = 1,78.$$

Изгибающий момент в заделке составляет $M = Gl + FK_d l = 4000 \cdot 2 + 1000 \cdot 1,78 \cdot 2 = 11\,560 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Находим напряжения ($W_x = 2 \cdot 50,6 = 101,2 \text{ см}^3 = 101,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$);

$$\sigma = \frac{M}{W_x} = 11\,560 / (101,2 \cdot 10^{-6}) = 115 \cdot 10^6 \text{ Па} = 115 \text{ МПа}.$$

**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ,
ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ
(РАСЧЕТ НА УСТАЛОСТЬ)****§ 99. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

Многие детали машин за время своей службы многократно подвергаются действию периодически изменяющихся во времени нагрузок (напряжений).

Например, ось вагона, работающая на изгиб и вращающаяся вместе с колесами, испытывает циклически изменяющиеся напряжения, хотя внешние силы сохраняют свои значение и направление. Волокна оси оказываются то в растянутой зоне, то в сжатой.

Весьма характерно, что при действии повторно-переменных нагрузок разрушение происходит в результате постепенного развития трещины, называемой **усталостной трещиной**. Термин «усталость» обязан своим происхождением ошибочному предположению первых исследователей этого явления о том, что под действием переменных напряжений изменяется структура металла.

В настоящее время установлено, что структура металла при действии периодических нагрузок не меняется. Природа усталостного разрушения обусловлена особенностями молекулярного и кристаллического строения вещества. По-видимому, она кроется в неоднородности строения материалов. Отдельные кристаллиты металла обладают различной прочностью в разных направлениях. Поэтому при определенных напряжениях в отдельных кристаллитах возникают пластические деформации.

При повторных разгрузках и нагрузках появляется наклеп и повышается хрупкость материала. В конце концов при большом числе повторений нагрузки способность материала к упрочению исчерпывается и возникает микротрещина на одной из плоскостей скольжения кристаллитов. Возникшая трещина сама становится сильным концентратором напряжений и с учетом увеличивающегося ослабления сечения становится местом окончательного разрушения (**долома**).

В сечении, где происходит разрушение, можно ясно различить две зоны: зону с гладкой, притертой поверхностью (зона постепенного развития усталостной трещины) и зону долома с шероховатой поверхностью.

На рис. XII.1 показана фотография сечения разрушившегося рельса. Вокруг внутренней трещины, которая осталась в рельсе после его прокатки, видна гладкая притертая поверхность, образовавшаяся в результате постепенного развития усталостной

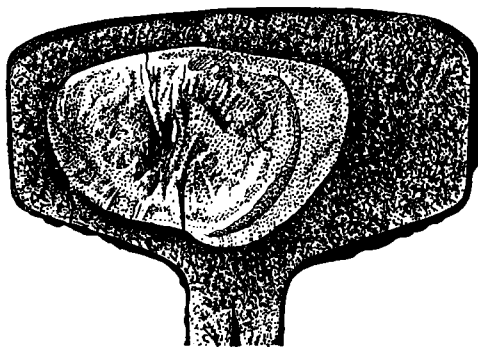


Рис. XII.1

трещины, далее идет шероховатая поверхность сечения, где произошло окончательное разрушение рельса вследствие большого ослабления его сечения.

Существенно влияют на возникновение и развитие усталостных трещин дефекты внутреннего строения материала (внутренние трещины, шлаковые включения и т. п.) и дефекты обработки поверхности детали (царапины, следы от резца или шлифовального камня и т. п.). Процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению, называют **усталостью**, а разрушение вследствие распространения усталостной трещины — **усталостным разрушением**. Свойство материала противостоять усталости называют **сопротивлением усталости**.

Исследования показывают, что поломки частей машин в подавляющем большинстве случаев происходят из-за усталостных трещин.

В общем случае, как уже было отмечено в § 3, нагрузки и напряжения могут изменяться во времени по очень сложным законам. Переменные напряжения могут иметь установившийся и неустановившийся режимы.

При неустановившемся режиме закон изменения напряжений по времени может быть любым.

При установившемся режиме изменение напряжений во времени носит повторяющийся (периодический) характер. Через определенный промежуток (период) времени происходит точное повторение напряжений.

Совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения при регулярном нагружении называют **циклом напряжений**.

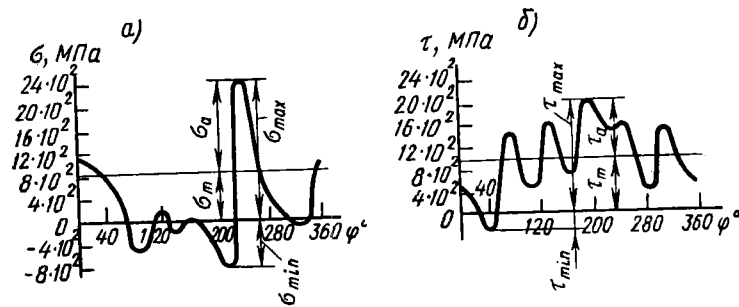


Рис. XII.2

На рис. XII.2, а, б приведены кривые изменения во времени нормальных и касательных напряжений в коленчатом валу дизеля за один оборот. Напряжения, как видим, изменяются по очень сложному закону, но имеют периодический (циклический) характер.

Влияние формы кривой изменения напряжений на сопротивление усталости изучено недостаточно, но имеющиеся данные позволяют все же считать, что это влияние невелико, а решающую роль играют значения максимального и минимального напряжений цикла и их отношение. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что изменение напряжений во времени происходит по закону, близкому к синусоиде (рис. XII.3, а).

Цикл переменных напряжений характеризуется:

- 1) максимальным по алгебраическому значению напряжением цикла σ_{\max} ;
- 2) минимальным по алгебраическому значению напряжением цикла σ_{\min} ;
- 3) средним напряжением цикла

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2. \quad (\text{XII.1})$$

Среднее напряжение цикла — постоянная во времени составляющая цикла (положительная или отрицательная);

4) амплитуда напряжений цикла

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2. \quad (\text{XII.2})$$

Амплитуда напряжений цикла — наибольшее (положительное) значение переменной составляющей цикла напряжений;

5) коэффициентом асимметрии цикла напряжений

$$R_a = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}. \quad (\text{XII.3})$$

Циклы, имеющие одинаковые значения R , называют подобными.

Из формул (XII.1), (XII.2), а также из рис. XII.3 видно, что

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad (\text{XII.4})$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (\text{XII.5})$$

В случае, если $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, имеем симметричный цикл напряжений (рис. XII.3, б). При этом

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_a = \sigma, \quad R = -1.$$

Цикл напряжений, показанный на рис. XII.3, а, называют отнулевым (пульсационным). Для этого случая

$$\sigma_{\max} = \sigma, \quad \sigma_{\min} = 0, \quad \sigma_m = \sigma/2,$$

$$\sigma_a = \sigma/2, \quad R = 0.$$

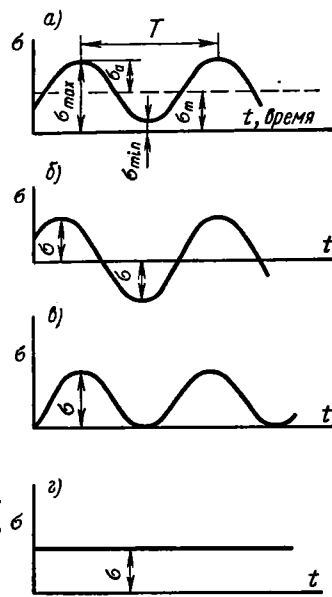


Рис. XII.3

Постоянное статическое напряжение (рис. XII.3, в) можно рассматривать как частный случай переменного с характеристиками

$$\sigma_{\max} = \sigma, \quad \sigma_{\min} = \sigma, \quad \sigma_m = \sigma, \quad \sigma_a = 0, \quad R = +1.$$

Любой асимметричный цикл напряжений можно представить как сумму симметричного цикла с максимальным напряжением, равным амплитуде заданного цикла, и постоянного напряжения, равного среднему напряжению заданного цикла (рис. XII.3, а). В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные здесь термины и соотношения с заменой σ на τ.

§ 100. КРИВАЯ УСТАЛОСТИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ЦИКЛЕ. ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

Для расчетов на прочность при действии повторно-переменных напряжений необходимо знать механические характеристики материала. Они определяются путем испытания на усталость образцов на специальных машинах. Наиболее простым и распространенным является испытание образцов при симметричном цикле напряжений. Принципиальная схема машины для испытания образцов на изгиб показана на рис. XII.4.

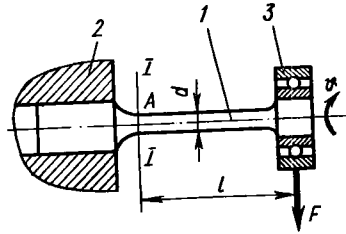


Рис. XII.4

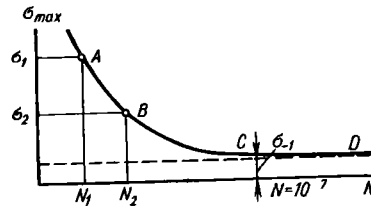


Рис. XII.5

Образец 1 закрепляется в патроне 2 шпинделя машины, вращающегося с некоторой угловой скоростью. На конце образца посажен подшипник 3, через который передается сила F постоянного направления. Легко видеть, что при этом образец подвергается действию изгиба с симметричным циклом. Действительно, в сечении $I-I$ образца в наиболее опасной точке A действует растягивающее напряжение σ , так как консоль изгибается выпуклостью вверх. Однако после того как образец повернется на половину оборота, точка A окажется внизу, в сжатой зоне и напряжение в ней станет равным $-\sigma$. После следующей половины оборота образца точка A окажется снова наверху и т. д. При переходе через нейтральную ось напряжение в точке A будет равно нулю.

Испытание ведут в такой последовательности. Берут 10 одинаковых образцов обычно диаметром 6—10 мм с полированной поверхностью. Первый образец нагружают до значительного напряжения σ_1 , для того чтобы он разрушился при сравнительно небольшом числе N_1 оборотов (циклов). При этом имеется в виду наибольшее напряжение цикла для наиболее напряженной точки сечения. При изгибе, как известно, наибольшее напряжение возникает в крайних точках сечения и определяется по формуле $\sigma_{\max} = M_n / W_x$. Результаты испытания наносят на диаграмму, которая строится в координатах $\sigma_{\max} - N$ (рис. XII.5).

После испытания первого образца на диаграмме появляется точка A , координаты которой N_1 и $\sigma_{1, \max}$ (или просто σ_1).

Затем испытывают второй образец, создавая в нем несколько меньшее напряжение σ_2 . Естественно, что он разрушится при большем числе циклов N_2 . На диаграмму наносят точку B с координатами N_2 и σ_2 и т. д.

Испытав все образцы и соединив точки A, B, C и т. д. плавной линией, получим некоторую кривую $ABCD$, которая называется **кривой усталости**.

Эта кривая характерна тем, что начиная с некоторого напряжения она идет практически горизонтально (участок CD). Это означает, что при определенном напряжении σ_{-1} образец может, не разрушаясь, выдержать бесконечно большое число циклов. Опыт испытания стальных образцов при нормальной температуре показывает, что если образец не разрушился до $N = 10^7$ циклов (это примерно 54 ч при 3000 об/мин), то образец не разрушается и при более длительном испытании.

Предварительно задаваемая наибольшая продолжительность испытания на усталость называется **базой испытаний**.

Для стальных образцов в обычных условиях база испытания равна 10 млн. циклов.

Максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостное разрушение до базы испытания, называется **пределом выносливости** σ_R . Для симметричных циклов $R = -1$, поэтому в этом случае предел выносливости обозначается σ_{-1} . Для деталей, не предназначенных на длительный срок службы, вводится понятие **предела ограниченной выносливости**, как максимального по абсолютному значению напряжения циклов, соответствующего заданному числу циклов, меньшему базового числа.

Аналогичным образом, но на других машинах проводят испытания и находят пределы выносливости при действии осевых сил (σ_{-1}), при кручении (τ_{-1}) и при сложных деформациях.

В настоящее время для многих материалов пределы выносливости найдены и приводятся в справочниках. Из этих данных видно, что для большинства металлов предел выносливости при симметричном цикле меньше предела текучести.

§ 101. ДИАГРАММЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И АМПЛИТУД ЦИКЛА

Для определения предела выносливости при действии напряжений с асимметричными циклами строятся диаграммы различных типов. Наиболее распространенными из них являются:

1) диаграмма предельных напряжений цикла в координатах $\sigma_{\max} - \sigma_m$;

2) диаграмма предельных амплитуд цикла в координатах $\sigma_a - \sigma_m$.

Рассмотрим эти диаграммы. В диаграмме первого типа предельное напряжение цикла, соответствующее пределу выносливости, откладывается по вертикали, среднее напряжение — по горизонтальной оси (рис. XII.6).

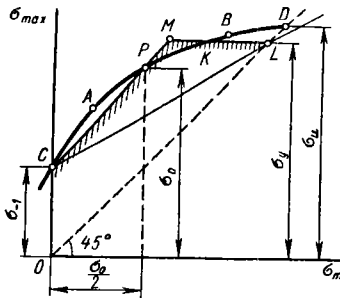


Рис. XII.6

Вначале на ось σ_{\max} наносится точка C , ордината которой представляет собой предел выносливости при симметричном цикле σ_{-1} (при симметричном цикле среднее напряжение равно нулю). Затем экспериментально определяют предел выносливости для какой-нибудь асимметричной нагрузки, например для отнулевой, у которой максимальное напряжение всегда в два раза больше среднего.

На диаграмму нанесем точку P , ордината которой представляет собой предел выносливости для отнулевого цикла σ_0 .

Для многих материалов значения σ_{-1} и σ_0 определены и приводятся в справочниках.

Аналогично опытным путем определяют предел выносливости для асимметричных циклов с другими параметрами.

Результаты наносят на диаграмму в виде точек A , B и т. д., ординаты которых есть пределы выносливости для соответствующих циклов напряжений. Точка D , лежащая одновременно и на биссектрисе OD , характеризует предельное напряжение (предел прочности) для постоянной нагрузки, у которой $\sigma_{\max} = \sigma_m$.

Так как для пластичных материалов опасным напряжением является также предел текучести σ_y , то на диаграмме наносится горизонтальная линия KL , ордината которой равна σ_y . (Для пластичных материалов, диаграмма растяжения которых не имеет площадки текучести, роль σ_y играет условный предел текучести $\sigma_{0.2}$.) Следовательно, диаграмма предельных напряжений окончательно имеет вид $CAPKL$.

Обычно эту диаграмму упрощают, заменяя ее двумя прямыми CM и ML , причем прямую CM проводят через точку C (соответствующую симметричному циклу) и точку P (соответствующую отнулевому циклу).

Указанный способ схематизации диаграммы предельных напряжений предложен С. В. Серенсенем и Р. С. Кина-сошвили.

В этом случае в пределах прямой SM предельное напряжение цикла (предел выносливости) выражается уравнением

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0/2} \sigma_m = \sigma_{-1} + (1 - \psi_0) \sigma_m, \quad (\text{XII.6})$$

или

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_m = \sigma_{-1} - \psi_0 \sigma_m, \quad (\text{XII.7})$$

где

$$\psi_0 = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0. \quad (\text{XII.8})$$

Коэффициент ψ_0 называется коэффициентом чувствительности материала к асимметрии цикла. Значения ψ_0 и, аналогично, коэффициента для кручения $\psi_\tau = (2\tau_{-1} - \tau_0) / \tau_0$ приведены в табл. XII.1.

Для построения диаграммы предельных амплитуд цикла по вертикальной оси откладывают амплитуду напряжений цикла, по горизонтальной оси — среднее напряжение цикла σ_m (рис. XII.7).

Точка A диаграммы соответствует пределу выносливости при симметричном цикле, так как при таком цикле $\sigma_m = 0$.

Точка B соответствует пределу прочности при постоянном напряжении, так как при этом $\sigma_a = 0$.

Точка C соответствует пределу выносливости при отнулевом цикле, так как при этом $\sigma_a = \sigma_m$.

Другие точки диаграммы соответствуют пределам выносливости для циклов с различным соотношением σ_a и σ_m .

Сумма координат любой точки предельной кривой ACB дает предел выносливости при данном среднем напряжении цикла [см. формулу (XII.4)]: $\sigma_R = \sigma_{\max}^u = \sigma_m^u + \sigma_a^u$.

Для пластичных материалов предельное напряжение не должно превосходить предела текучести: $\sigma_a + \sigma_m \leq \sigma_y$. Поэтому на

Т а б л и ц а XII.1

Коэффициенты	δ_u , МПа				
	320—420	400—500	600—750	700—1050	1050—1250
ψ_0 (изгиб, растяжение, сжатие)	0	0	0,05	0,10	0,20
ψ (кручения)	0	0	0	0,05	0,10

диаграмму предельных напряжений наносим прямую DE , построенную по уравнению $\sigma_a + \sigma_m = \sigma_y$.

Окончательная диаграмма предельных напряжений имеет вид AKD .

На практике обычно пользуются приближенной диаграммой $\sigma_a - \sigma_m$, построенной по трем точкам A , C и D и состоящей из двух прямолинейных участков AL и LD (способ Серенсена — Кинасошвили). Точка L получается в результате пересечения двух прямых: DE и AC .

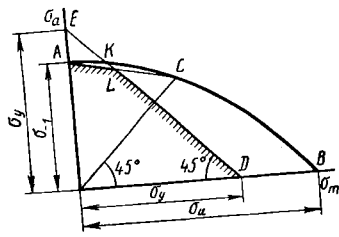


Рис. XII.7

Расчеты по диаграммам предельных напряжений и предельных амплитуд цикла при одинаковых способах аппроксимации приводят к одним и тем же результатам.

§ 102. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

Опыты показывают, что на предел выносливости существенно влияют следующие факторы:

концентрация напряжений, размеры поперечных сечений деталей, состояние поверхности, характер технологической обработки и др.

Рассмотрим их более подробно.

Влияние концентрации напряжений. Резкие изменения формы детали, отверстия, выточки, надрезы и т. п. значительно снижают предел выносливости по сравнению с пределом выносливости для гладких цилиндрических образцов.

Это снижение учитывается **эффективным коэффициентом концентрации напряжений**, который определяется экспериментальным путем.

Для этого берут две серии одинаковых образцов (по 10 образцов в каждой), но первые без концентрации напряжений, а вторые — с концентрацией, и определяют пределы выносливости при симметричном цикле для образцов без концентрации напряжений σ_{-1} и для образцов с концентрацией напряжений σ_{-1k} .

Отношение

$$K_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_{-1k} \quad (\text{XII.9})$$

определяет эффективный коэффициент концентрации напряжений. Опыты показывают, что этот коэффициент отличается от

теоретического α_σ *, так как первый зависит не только от формы детали, но и от материала.

Значения K_σ приводятся в справочниках. Для примера на рис. XII.8 приведены значения эффективных коэффициентов концентрации при изгибе для ступенчатых валов с отношением $D/d=2$, с переходом по круговой галтели радиуса r . Эти данные

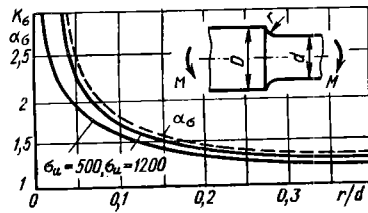


Рис. XII.8

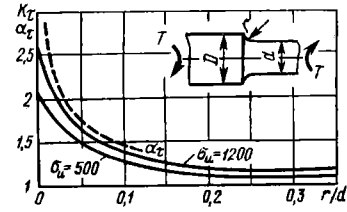


Рис. XII.9

получены при испытании образцов $d=30 \div 50$ мм для сталей с пределом прочности $\sigma_u=500$ и 1200 МПа. Там же для сравнения приведен график теоретического коэффициента концентрации α_σ (пунктиром).

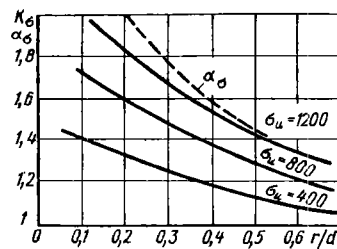


Рис. XII.10

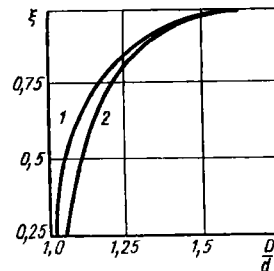


Рис. XII.11

На рис. XII.9. даны значения коэффициентов концентрации при кручении α_τ и K_τ , а на рис. XII.10 — для растяжения — сжатия. Для определения эффективных коэффициентов концентрации при других отношениях D/d следует пользоваться формулой

$$K_\sigma = 1 + \xi [(K_\sigma)_0 - 1], \quad (\text{XII.10})$$

* Значения теоретического коэффициента определяются либо теоретически (методом теории упругости), либо экспериментально путем сравнения пределов прочности для образцов из весьма хрупких материалов без концентрации и с концентрацией напряжений.

где $(K_\sigma)_0$ — эффективный коэффициент концентрации, соответствующий отношению $D/d=2$; ξ — поправочный коэффициент, определяемый по рис. XII.11, при этом кривая 1 дает значение ξ при изгибе, кривая 2 — при кручении.

Ниже приведены значения K_σ и K_τ для валов со шпоночными пазами (одним или двумя):

σ_u , МПа	500	750	1000		
K_σ	1,5	1,75	2,0		
σ_u , МПа	600	700	800	900	
K_τ	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9

В тех случаях, когда экспериментальные данные по определению эффективного коэффициента концентрации напряжений отсутствуют, а известны значения теоретического коэффициента концентрации напряжений, можно использовать для определения K_σ следующую эмпирическую формулу: $K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1)$, где q — так называемый коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений $q = (K_\sigma - 1) / (\alpha_\sigma - 1)$. Для высокопрочных легированных сталей значение q близко к 1. Для конструкционных сталей в среднем $q = 0,6 \div 0,8$, причем более прочным сталям соответствуют большие значения q . Для серого чугуна значение q близко к нулю. Иначе говоря, серый чугун нечувствителен к концентрации напряжений. Более подробные данные относительно q для сталей приведены на рис. VII.12.

Влияние абсолютных размеров поперечного сечения детали.
Опыты показывают, что чем больше абсолютные размеры поперечного сечения детали, тем меньше предел выносливости.

Отношение предела выносливости детали диаметром d к пределу выносливости лабораторного образца диаметром $d_0 = 6 \div 10$ мм называют коэффициентом влияния абсолютных размеров поперечного сечения:

$$K_d = (\sigma_{-1})_d / [(\sigma_{-1})_{d_0}]$$

для нормальных напряжений.
Коэффициенты влияния абсолютных размеров поперечного сечения могут определяться и

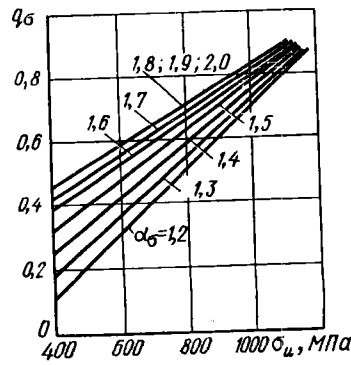


Рис. XII.12

на образцах с концентрацией напряжений. В этом случае

$$K_d = (\sigma_{-1k})_d / [(\sigma_{-1k})_{d_0}]$$

При этом как деталь размером d , так и образец размером d_0 должны иметь геометрически подобную конфигурацию.

На рис. XII.13 приведен график значений K_d . Кривая 1 соответствует детали из углеродистой стали без концентратора, кривая 2 — детали из легированной стали при отсутствии концентратора и из углеродистой стали при наличии концентратора,

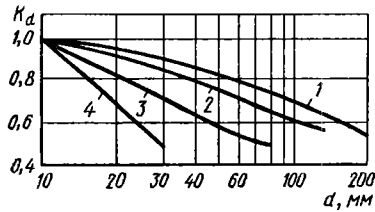


Рис. XII.13

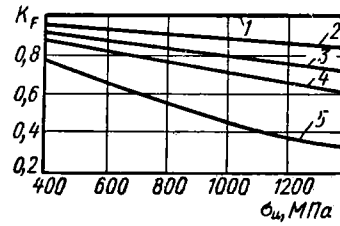


Рис. XII.14

кривая 3 — детали из легированной стали при наличии концентратора, кривая 4 — для любой стали при весьма большой концентрации напряжений (например, при концентраторе типа надреза).

Из-за отсутствия достаточного количества экспериментальных данных о коэффициентах $K_{d\tau}$ (при кручении) можно приближенно принимать, что $K_{d\tau} = K_d$.

Следует отметить, что экспериментальных данных для определения K_d еще недостаточно.

Влияние качества поверхности и упрочнения поверхностного слоя. Опыты показывают, что

грубая обработка поверхности детали снижает предел выносливости. Влияние качества поверхности связано с изменением микрогеометрии (шероховатости) и состоянием металла в поверхностном слое, что, в свою очередь, зависит от способа механической обработки.

Для оценки влияния качества поверхности на предел выносливости вводится коэффициент K_F , называемый **коэффициентом качества** поверхности и равный отношению предела выносливости образца с данной шероховатостью поверхности (σ_{-1n}) к пределу выносливости образца с поверхностью не грубее $R_a = 0,32$:

$$K_F = \sigma_{-1n} / \sigma_{-1}$$

На рис. XII.14 приведен график значений K_F в зависимости от предела прочности σ_u стали и вида обработки поверхности.

При этом кривые соответствуют следующим видам обработки поверхности: 1 — полирование, 2 — шлифование, 3 — тонкая обточка, 4 — грубая обточка, 5 — наличие окалины.

Различные способы поверхностного упрочнения (наклеп, цементация, азотирование, поверхностная закалка токами высокой частоты и т. п.) сильно повышают значения предела выносливости. Это учитывается введением коэффициента влияния поверхностного упрочнения K_v . Путем поверхностного упрочнения деталей можно в 2—3 раза повысить сопротивление усталости деталей машин.

Значения коэффициента K_v можно найти в справочниках.

§ 103. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ЦИКЛЕ

С учетом совместного влияния перечисленных выше факторов предел выносливости реальной детали меньше предела выносливости лабораторного образца. Он вычисляется по формуле

$$(\sigma_{-1k})_d = \sigma_{-1} K_d K_F / K_\sigma. \quad (\text{XII.11})$$

Зная максимальное напряжение симметричного цикла, при котором должна работать данная деталь, можно найти запас прочности по усталости:

$$n_\sigma = (\sigma_{-1k})_d / \sigma_{\max}. \quad (\text{XII.12})$$

Аналогично определяется коэффициент запаса прочности и при кручении:

$$n_\tau = (\tau_{-1k})_d / \tau_{\max}. \quad (\text{XII.13})$$

При сложном напряженном состоянии коэффициент запаса прочности вычисляется обычно по формуле (IX.43):

$$n = n_\sigma n_\tau / \sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2},$$

где n_σ и n_τ определяют по формулам (XII.12) и (XII.13).

§ 104. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ ПРИ АСИММЕТРИЧНОМ ЦИКЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Для расчетов при асимметричном цикле напряжений принимают упрощенную диаграмму *SML* предельных напряжений образца (см. рис. XII.6 и XII.15.)

Учитывая концентрацию напряжений, влияние абсолютных размеров поперечного сечения детали, состояние поверхности, строят диаграмму предельных напряжений детали. При этом в соответствии с данными опытов влияние перечисленных факто-

ров относят только к переменной составляющей цикла, т. е. к амплитуде σ_a . Предельная амплитуда напряжений для образца, согласно формуле (XII.7),

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_m = \sigma_1 - \psi \sigma_m. \quad (\text{XII.14})$$

Предельная амплитуда напряжений для детали, согласно сказанному выше, равна

$$\begin{aligned} (\sigma_{ak})_d &= \sigma_a K_d K_F / K_\sigma = \\ &= (\sigma_{-1} - \psi \sigma_m) K_d K_F / K_\sigma. \end{aligned} \quad (\text{XII.15})$$

Уравнение линии предельных напряжений EN (рис. XII.15) для детали получит вид

$$\begin{aligned} (\sigma'_{Rk})_d &= (\sigma'_{ak})_d + \sigma'_m = \\ &= (\sigma_{-1} - \psi \sigma'_m) (K_d K_F / K_\sigma) + \\ &\quad + \sigma'_m. \end{aligned} \quad (\text{XII.16})$$

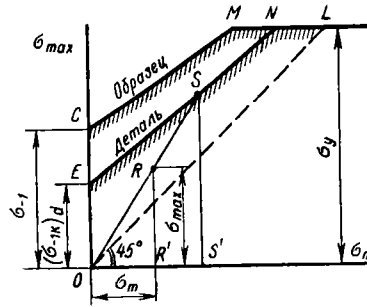


Рис. XII.15

Здесь штрихами обозначены текущие координаты.

Вычислим теперь коэффициент запаса прочности детали при действии переменных напряжений σ_{\max} и σ_m (точка R диаграммы, рис. XII.15).

Предположим, что при увеличении нагрузки на деталь отношение $\sigma_{\max} / \sigma_m = \text{const}$. Такое нагружение называется *простым*. В этом случае предельной точкой, соответствующей разрушению, является точка S .

Коэффициент запаса прочности равен отношению отрезков SS' и RR' :

$$n_\sigma = SS' / RR' = (\sigma_{Rk})_d / \sigma_{\max}. \quad (\text{XII.17})$$

Величину $(\sigma_{Rk})_d$ (ординату точки S) найдем в результате совместного решения уравнений линии EN и линии OS . Уравнение линии OS имеет вид

$$\sigma'_{\max} = \sigma_{\max} \sigma'_m / \sigma_m. \quad (\text{XII.18})$$

(Штрихами обозначены текущие координаты.)

Приравняв правые части формул (XII.16) и (XII.18), получим

$$(\sigma_{-1} - \psi \sigma'_m) (K_d K_F / K_\sigma) + \sigma'_m = \sigma_{\max} \sigma'_m / \sigma_m,$$

откуда

$$\sigma'_m = \sigma_{-1} / \left(\psi_\sigma - \frac{K_\sigma}{K_d K_F} + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} \frac{K_\sigma}{K_d K_F} \right).$$

Подставив значение σ'_m в формулу (XII.16) или (XII.18), найдем ординату точки S:

$$(\sigma_{Rk})_d = \sigma_{-1} \sigma_{\max} / [\sigma_a K_\sigma / (K_d K_F) + \psi_\sigma \sigma_m] \quad (\text{XII.19})$$

Следовательно, на основании формулы (XII.17) получается следующая окончательная зависимость для определения коэффициента запаса прочности:

$$n_\sigma = \sigma_{-1} / [\sigma_a K_\sigma / (K_d K_F) + \psi_\sigma \sigma_m] \quad (\text{XII.20})$$

Аналогично, при кручении

$$n_\tau = \tau_{-1} / [\tau_a K_\tau / (K_d K_F) + \psi_\tau \tau_m] \quad (\text{XII.21})$$

При сложном напряженном состоянии, возникающем, например, при кручении с изгибом, коэффициент запаса прочности вычисляют по формуле (IX.43):

$$n = n_\sigma n_\tau / \sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2},$$

а значения n_σ и n_τ — по формулам (XII.20) и (XII.21).

Кроме коэффициента запаса прочности по сопротивлению усталости необходимо вычислять коэффициент запаса по сопротивлению пластическим деформациям, так как точка S может оказаться выше линии ML. Коэффициент запаса прочности по сопротивлению пластическим деформациям вычисляется по формулам

$$n_\sigma = \sigma_y / \sigma_{\max} = \sigma_y / (\sigma_a + \sigma_m); \quad (\text{XII.22})$$

$$n_\tau = \tau_y / \tau_{\max} = \tau_y / (\tau_a + \tau_m). \quad (\text{XII.23})$$

Расчетным (действительным) является меньший из коэффициентов запаса, вычисляемых по формуле (XII.20) или (XII.22) либо при кручении соответственно по формуле (XII.21) или (XII.23). В случае расчета на изгиб с кручением в формулу для определения общего коэффициента запаса прочности следует подставлять меньшие из значений n_σ и n_τ , вычисляемые, как указано выше.

§ 105. ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕРЫ ПОВЫШЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ

При конструировании деталей, работающих в условиях возникновения переменных напряжений, рекомендуется принимать следующие меры для повышения сопротивления усталости:

1. Применять более однородные материалы, с мелкозернистой структурой, свободные от внутренних очагов концентрации (трещин, газовых пузырьков, неметаллических включений и т. д.).

2. Придавать деталям такие очертания, при которых была бы уменьшена концентрация напряжений. Не следует допускать переходов от одного размера сечения к другому без переходных кривых. В некоторых случаях рекомендуется применять специальные разгружающие надрезы — деконцентраторы напряжений. Так, например, если у места резкого перехода сделать плавную выкружку в более толстой части детали (рис. XII.16), то местные напряжения резко снизятся.



Рис. XII.16

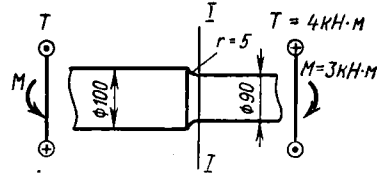


Рис. XII.17

3. Тщательно обрабатывать поверхность детали, вплоть до полировки, устраняя малейшие царапины, так как они могут явиться началом будущей усталостной трещины.

4. Применять специальные методы повышения сопротивления усталости (поверхностное упрочнение, тренировка деталей кратковременными повышенными нагрузками и т. д.).

Только произведя поверхностное упрочнение путем наклепа можно повысить срок службы деталей машин в 2—3 раза при незначительных дополнительных расходах. Это равносильно тому, что выпуск машин может быть удвоен и утроен.

Из этого примера видно, какой огромный экономический эффект можно получить при правильном конструировании и технологической обработке деталей машин.

Пример XII.1. Рассчитать на усталость вал с галтелью $r=5$ мм (рис. XII.17).

В поперечном сечении вала действуют изгибающий момент $M=3$ кН·м, крутящий момент $T=4$ кН·м.

Материал вала — сталь 45, $\sigma_u=610$ МПа, $\sigma_y=360$ МПа, $\sigma_{-1}=250$ МПа, $\tau_y=210$ МПа, $\tau_{-1}=150$ МПа.

Поверхность вала шлифованная, поэтому коэффициент влияния шероховатости поверхности $K_F=0,92$ (см. рис. XII.14).

Принять, что напряжения изгиба изменяются по симметричному циклу, а кручения — по отнулевому.

следующие две гипотезы: а) гипотезу плоских сечений; б) гипотезу об одноосности напряженного состояния балки.

На рис. XIII.7 показана сетка на боковой поверхности балки после испытания. Из этой фотографии видно, что, несмотря на пластические деформации, о чем свидетельствуют *линии Чернова — Людерса*, гипотеза плоских сечений сохраняет свою силу (вертикальные линии остались прямыми).

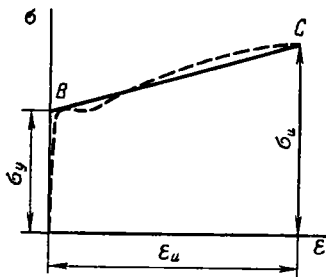


Рис. XIII.6

На основании гипотезы плоских сечений получим формулу, устанавливающую линейный закон распределения относительных деформаций по высоте балки:

$$e = y/\rho, \quad (\text{XIII.17})$$

где y — расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна; ρ — радиус кривизны балки.

На основании второй гипотезы и формулы (XIII.16) получим: для растянутой зоны

$$\sigma = \sigma_y + E_1 y/\rho; \quad (\text{XIII.18})$$

для сжатой зоны

$$\sigma = -(\sigma_y + E_1 y/\rho). \quad (\text{XIII.18a})$$

Рассматривая сечения, имеющие горизонтальную ось симметрии, составим уравнение равновесия части балки, чтобы определить радиус кривизны. Для этого приравняем нулю сумму моментов относительно нейтральной оси:

$$2 \int_{A/2} \sigma y \, dA = M,$$

где M — изгибающий момент в сечении.

Используя формулу (XIII.18), получим

$$2 \int_{A/2} (\sigma_y + E_1 y/\rho) y \, dA = M, \quad (\text{XIII.19})$$

или

$$2 \int_{A/2} \sigma_y y \, dA + \frac{2E_1}{\rho} \int_{A/2} y^2 \, dA = M. \quad (\text{XIII.20})$$

ГЛАВА XIII

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ

§ 106. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА

До сих пор, составляя расчетные уравнения, пользовались законом Гука.

Из диаграмм растяжения (сжатия) видно, что закон Гука действителен лишь до тех пор, пока напряжения не превосходят предела пропорциональности. Допуская некоторую неточность, мы пользовались законом Гука до напряжений, равных пределу текучести. Однако достижение предела текучести в одной, хотя бы и наиболее опасной, точке не означает еще разрушения детали или возникновения таких деформаций, при которых работа (эксплуатация) детали не может продолжаться. Вследствие пластических деформаций включаются в работу менее нагруженные частицы материала, что позволяет увеличить допустимую нагрузку конструкции.

Пластическая деформация в 0,2 %, допускаемая при установлении предела текучести, не является предельной и во многих случаях может быть повышена.

Чтобы производить расчеты, учитывающие пластические деформации материала, необходимо установить расчетную зависимость между напряжениями и деформациями (диаграмму $\sigma - \epsilon$).

Эта диаграмма должна быть по возможности простой и в то же время отражать главнейшие свойства материалов.

Реальные диаграммы $\sigma - \epsilon$ могут быть разбиты на три типа (рис. XIII.1):

а) диаграмма на рис. XIII.1, а характерна для хрупких материалов (чугун, хрупкое литье);

б) диаграмма с ясно выраженной площадкой текучести характерна для весьма пластичных материалов (малоуглеродистые стали) (рис. XIII.1, б);

в) диаграмма на рис. XIII.1, в характерна для стали, обладающей малой и средней пластичностью, а также для цветных металлов и их сплавов как при средней, так и при высокой пластичности.

Для хрупких материалов отклонение от закона Гука сравнительно невелико и при расчете деталей из таких материалов пластические деформации ввиду их малости можно не учитывать, считая, что материал до момента разрушения подчиняется закону Гука (рис. XIII.1, а). При расчете деталей из весьма пластичных материалов (рис. XIII.1, б) расчетную диаграмму при учете пластических деформаций принимают по рис. XIII.1, в, т. е. упрочнение материала не учитывают, так как

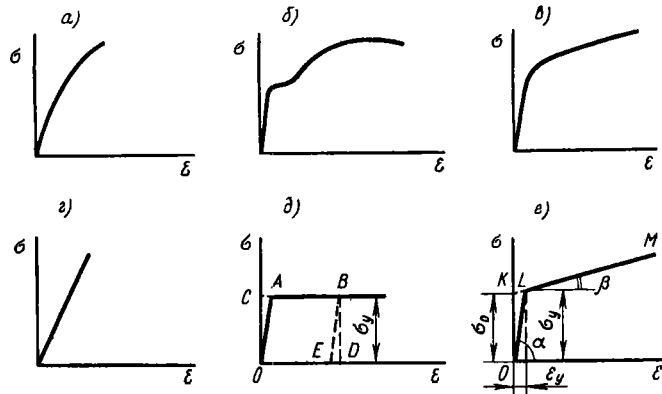


Рис. XIII.1

при напряжениях, равных пределу текучести, развиваются значительные пластические деформации и получаются перемещения, при которых эксплуатация детали не может продолжаться (диаграмма Прандтля OAB). Иногда применяют еще более простую диаграмму ОСВ, т. е. считают материал **идеально пластичным**. При таком простом предположении о свойствах материала имеется возможность решать наиболее сложные задачи пластичности: сложное напряженное состояние, статически неопределимые системы.

Ниже рассматриваются некоторые наиболее простые задачи, решаемые с применением диаграммы этого типа.

Для материалов средней пластичности расчетная диаграмма упругопластических деформаций приведена на рис. XIII.1, в. Она учитывает упрочнение материала.

Для точки L материал считается упругодеформирующимся по закону Гука, за точкой L — пластически деформирующимся (прямая LM). Некоторые исследования выполнены с применением диаграммы ОКМ (жесткопластичные материалы).

Следует отметить, что в области пластических деформаций законы нагружения и разгрузки различны, причем закон нагру-

жения имеет нелинейный характер, а закон разгрузки всегда линеен. На рис. XIII.1, δ закон нагружения характеризуется линией OAB , закон разгрузки — линией BE , всегда параллельной линии OA . Полная деформация OD состоит из двух частей: пластической OE и упругой ED , исчезающей после снятия нагрузки.

Необходимо также отметить, что при изучении пластических деформаций, так же как и при изучении упругих деформаций, следует различать два случая:

- 1) случай малых упругопластических деформаций, когда деформации малы в сравнении с размерами деформирующихся тел;
- 2) случай больших упругопластических деформаций, когда изменениями в размерах тела и расстояниях между точками приложения сил и т. д. пренебрегать нельзя.

В дальнейшем рассматриваются случаи малых упругопластических деформаций. Имеются также в виду только статические, однократно приложенные нагрузки, так как при действии повторных нагрузок необходимо определять пластические деформации, возникающие в детали при каждой новой нагрузке. При действии же периодически повторяющихся нагрузок детали должны рассчитываться на усталость.

§ 107. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ — СЖАТИЕ, С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛА

Рассмотрим пример из § 20 (рис. XIII.2). Решая этот пример в предположении, что деформации являются упругими, т. е. напряжения не выходят за предел пропорциональности, имеем:

$$N_1 = N_3 = 0,4F; \quad N_2 = 0,2F.$$

Так как площадь стержней одинакова, то напряжение в крайних стержнях $\sigma_1 = \sigma_3 = 0,4F/A$ в два раза больше, чем в среднем $\sigma_2 = 0,2F/A$. Опасную нагрузку * F_y определим, приравняв напряжения в крайних стержнях пределу текучести:

$$F_y = \sigma_y A / 0,4 = 2,5\sigma_y A. \quad (\text{XIII.1})$$

Проследим теперь поведение системы при дальнейшем возрастании нагрузки, считая материал идеально пластичным (см. рис. XIII.1, δ).

* При расчете по упругому состоянию опасной считается нагрузка, при которой хотя бы в одном стержне напряжения достигают предела текучести.

Усилия в крайних стержнях, несмотря на возрастание нагрузки, не увеличиваются, оставаясь равными $\sigma_y A$.

Усилие же в среднем стержне увеличивается до тех пор, пока напряжения в нем не достигнут предела текучести. После того как усилия во всех трех стержнях станут равны $\sigma_y A$, несущая способность системы будет исчерпана. Из условия равновесия системы в предельном состоянии получим

$$F_u = 3\sigma_y A. \quad (\text{XIII.2})$$

Сравнивая это выражение с выражением (XIII.1), видим, что при учете пластичности материала предельная нагрузка получилась больше, чем опасная нагрузка при расчете по упругому состоянию.

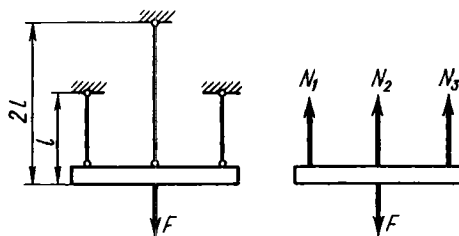


Рис. XIII.2

Рассмотрим теперь систему, представленную на рис. XIII.3. Определяя усилия в стержнях этой системы при работе материала в упругой стадии, легко установить, что наиболее нагруженным является средний стержень (решить самостоятельно).

Пределом текучести материала этого стержня и определяется опасная нагрузка системы:

$$F_y = \sigma_y A (2 \cos^3 \alpha + 1).$$

При расчете этой системы с учетом пластических деформаций за предельное состояние системы следует принять такое, при котором напряжения во всех трех стержнях достигают предела текучести, а усилия — величины $\sigma_y A$.

Из условия равновесия отсеченной части получаем

$$\sum Y = 0; \quad \sigma_y A + 2\sigma_y \cos \alpha = F_u.$$

Предельная нагрузка получается равной

$$F_u = \sigma_y A (2 \cos \alpha + 1) > F_y.$$

Отсюда вытекает, что при учете пластических деформаций предельная нагрузка статически неопределимой системы получается большей, чем при расчете по упругому состоянию.

При действии статической нагрузки на этой основе получают возможность увеличивать в определенных случаях и допускаемую нагрузку:

$$F_{adm} = F_u / n_{adm}.$$

При расчете же по упругому состоянию имеем

$$F_{adm} = F_y / n'_{adm}.$$

Отношение допускаемых нагрузок, определенных двумя указанными способами, не равно отношению F_u / F_y , так как коэффициент запаса n'_{adm} , как правило, принимается на 15—20 % выше, чем n_{adm} . Таким образом, выигрыш в значении допускаемой нагрузки (или в весе материала — при проектном расчете) с переходом к расчету, учитывающему пластические деформации, получается несколько меньше, чем это представляет на первый взгляд при сопоставлении опасной F_y и предельной F_u нагрузок.

Необходимо отметить, что для статически определимой системы, элементы которой работают на растяжение (сжатие) значения F_y и F_u совпадают.

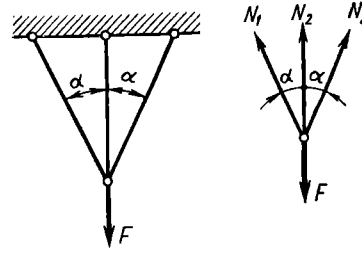


Рис. XIII.3

§ 108. ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

При упругом кручении круглого стержня (см. § 36) максимальные напряжения в контурных точках сечения определяют по формуле

$$\tau_{max} = T / W_p. \quad (XIII.3)$$

Опасный крутящий момент получится из условия, что максимальные напряжения будут равны пределу текучести (рис. XIII.4, а):

$$T_y = \tau_y W_p = \tau_y \pi d^3 / 16 \approx \tau_y 0,2 d^3. \quad (XIII.4)$$

Однако для пластичного материала этот момент не является предельным. Возможно дальнейшее увеличение крутящего момента вследствие роста напряжений во внутренних, менее напряженных точках сечения.

Предельным состоянием для идеально пластичного материала будет такое, при котором напряжения во всех точках сечения станут равными пределу текучести (рис. XIII.4, б).

Составим выражение для предельного крутящего момента как результирующего момента возникающих в сечении (в предельном состоянии) внутренних касательных сил:

$$T_u = \int_A \tau_y dA\rho. \quad (\text{XIII.5})$$

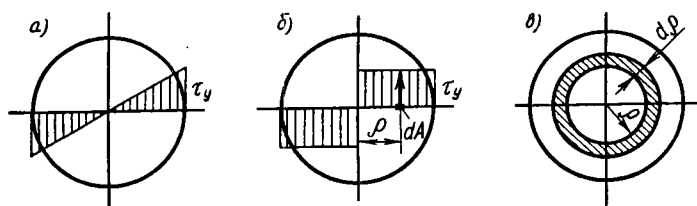


Рис. XIII.4

Так как $dA = 2\pi\rho d\rho$ (площадь элементарного кольца, рис. XIII.4, в), то

$$T_u = 2\pi\tau_y \int_0^r \rho^2 d\rho. \quad (\text{XIII.6})$$

или

$$T_u = 2/3 \pi r^3 \tau_y = W_{p,pl} \tau_y. \quad (\text{XIII.7})$$

Здесь

$$W_{p,pl} = 2/3 \pi r^3 = \pi d^3/12. \quad (\text{XIII.8})$$

Величина $W_{p,pl}$ называется **пластическим моментом сопротивления при кручении**.

Сравнивая формулы (XIII.7) и (XIII.4), видим, что предельный крутящий момент при учете пластичности материала больше опасного момента при учете только упругих деформаций. Это отношение равно

$$T_u/T_y = W_{p,pl}/W_p = (\pi d^3/12) / (\pi d^3/16) = 4/3. \quad (\text{XIII.9})$$

Опыты показывают, что предельный крутящий момент, вычисленный по формуле (XIII.7), весьма близко совпадает с экспериментальным значением.

Не приводя вывода, укажем, что для кольцевого сечения с наружным диаметром D и внутренним d пластический момент

сопротивления при кручении

$$W_{p, pl} = \pi D^3 (1 - c^3) / 12,$$

где $c = d/D$.

Вывод этой формулы рекомендуется сделать самому учащемуся.

§ 109. ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

При упругом изгибе за опасное принималось такое состояние, когда нормальные напряжения в крайних точках сечения балки достигали предела текучести (рис. XIII.5, а).

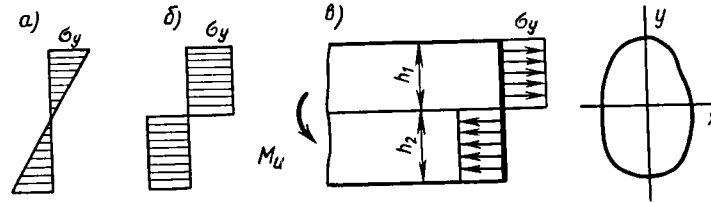


Рис. XIII.5

Изгибающий момент при этом получается равным

$$M_y = W_x \sigma_y, \quad (\text{XIII.10})$$

где W_x — момент сопротивления при изгибе. Например, для прямоугольника

$$W_x = bh^2/6.$$

Однако, как показывают опыты, такое состояние не является предельным. Возможен дальнейший рост нагрузки вследствие распространения текучести на внутренние волокна балки.

Эпюра напряжений в предельном состоянии показана на рис. XIII.5, б.

Дальнейшее возрастание нагрузки невозможно (упрочнение материала не учитываем). В опасном сечении (где действует максимальный изгибающий момент) образуется так называемый **пластический шарнир**, в этом сечении изгибающий момент достигает предельного значения M_u .

Этот момент определим из условия, что во всех точках опасного поперечного сечения нормальные напряжения равны (по модулю) пределу текучести σ_y .

Рассмотрим вначале случай чистого плоского изгиба. Определим положение нейтральной оси поперечного сечения. Учиты-

вая, что продольная сила, представляющая собой равнодействующую внутренних нормальных сил $\sigma_u A$, равна нулю, получаем

$$N = \int_A \sigma_y dA = 0$$

или

$$\sigma_y \int_0^{h_1} b dy - \sigma_y \int_0^{h_2} b dy = 0,$$

где b — ширина балки (переменная).

Интегралы представляют собой площади A_1 и A_2 растянутой и сжатой частей сечения. Таким образом,

$$\sigma_y (A_1 - A_2) = 0, \quad (\text{XIII.11})$$

откуда

$$A_1 = A_2. \quad (\text{XIII.12})$$

Следовательно,

при пластическом изгибе нейтральная ось делит сечение на две равновеликие части.

Составим теперь выражение для предельного изгибающего момента, как результирующего момента внутренних нормальных сил $\sigma_y dF$ (рис. XIII.5, в):

$$M_u = \int_A \sigma_y dA y,$$

или

$$M_u = \sigma_y \int_{A_1} y dA + \sigma_y \int_{A_2} y dA.$$

Интегралы представляют собой статические моменты S_{1x} и S_{2x} верхней и нижней частей площади сечения относительно нейтральной оси. Следовательно,

$$M_u = \sigma_y (S_{1x} + S_{2x}). \quad (\text{XIII.13})$$

Для сечений, имеющих перпендикулярную силовой плоскости ось симметрии, $S_{1x} = S_{2x} = S_{0x}$, где S_{0x} — статический момент полусечения относительно нейтральной оси.

Тогда формула (XIII.13) переходит в следующую:

$$M_u = \sigma_y 2S_{0x} = \sigma_y W_{x,pl}, \quad (\text{XIII.14})$$

где $W_{x,pl} = 2S_{0x}$ — так называемый пластический момент сопротивления при изгибе.

Например, для прямоугольника

$$W_{x, pl} = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} 2 = \frac{bh^2}{4}. \quad (\text{XIII.15})$$

Следовательно, для прямоугольного сечения

$$M_u/M_y = W_{x, pl}/W_x = (bh^2/4) : (bh^2/6) = 1,5,$$

т. е. предельный изгибающий момент при учете пластических деформаций увеличивается в 1,5 раза. Для круглого сечения отношение предельных моментов равно 1,7, для кольцевого с отношением $d/D=0,5$ оно составляет 1,57, для двутаврового сечения — примерно 1,15.

Рассмотренный способ, как показывает опыт, пригоден в качестве первого приближения и для общего случая изгиба, когда в поперечных сечениях возникают и изгибающий момент, и поперечная сила.

При расчете статически неопределимых балок учет пластических деформаций позволяет вскрыть еще более значительные резервы увеличения несущей способности системы.

Рассмотрим, например, работу статически неопределимой балки, показанной на рис. VII.27. Поскольку в сечении D возникает наибольший изгибающий момент, здесь раньше всего и образуется пластический шарнир, когда напряжение по всему сечению будет равно пределу текучести. Однако образование пластического шарнира в сечении еще не исчерпает несущей способности балки. Возможен дальнейший рост нагрузки до тех пор, пока в сечении C не образуется второй пластический шарнир, который превратит балку в геометрически изменяемую систему, неспособную воспринимать нагрузку.

§ 110. ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Для решения этой задачи примем зависимость между σ и ϵ , как для жесткопластичного материала:

$$\sigma = \sigma_y + E_1 \epsilon, \quad (\text{XIII.16})$$

где E_1 — модуль упрочнения, равный тангенсу угла наклона прямой BC (рис. XIII.6). Будем считать, что модули упрочнения при растяжении и при сжатии имеют одинаковые значения.

Модель жесткопластичного материала хорошо отображает реальные диаграммы $\sigma-\epsilon$ для пластичных материалов.

Ограничиваясь случаем малых упругопластических деформаций, можно принять, как и для изгиба в упругой области,

следующие две гипотезы: а) гипотезу плоских сечений; б) гипотезу об одноосности напряженного состояния балки.

На рис. XIII.7 показана сетка на боковой поверхности балки после испытания. Из этой фотографии видно, что, несмотря на пластические деформации, о чем свидетельствуют *линии Чернова — Людерса*, гипотеза плоских сечений сохраняет свою силу (вертикальные линии остались прямыми).

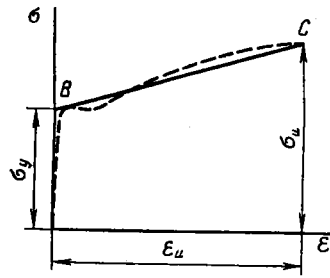


Рис. XIII.6

На основании гипотезы плоских сечений получим формулу, устанавливающую линейный закон распределения относительных деформаций по высоте балки:

$$\varepsilon = y/\rho, \quad (\text{XIII.17})$$

где y — расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна; ρ — радиус кривизны балки.

На основании второй гипотезы и формулы (XIII.16) получим: для растянутой зоны

$$\sigma = \sigma_y + E_1 y/\rho; \quad (\text{XIII.18})$$

для сжатой зоны

$$\sigma = -(\sigma_y + E_1 y/\rho). \quad (\text{XIII.18a})$$

Рассматривая сечения, имеющие горизонтальную ось симметрии, составим уравнение равновесия части балки, чтобы определить радиус кривизны. Для этого приравняем нулю сумму моментов относительно нейтральной оси:

$$2 \int_{A/2} \sigma y \, dA = M,$$

где M — изгибающий момент в сечении.

Используя формулу (XIII.18), получим

$$2 \int_{A/2} (\sigma_y + E_1 y/\rho) y \, dA = M, \quad (\text{XIII.19})$$

или

$$2 \int_{A/2} \sigma_y y \, dA + \frac{2E_1}{\rho} \int_{A/2} y^2 \, dA = M. \quad (\text{XIII.20})$$

Обозначим:

$$W_{x,pl} = 2S_{0x} = 2 \int_{A/2} y \, dA, \quad (\text{XIII.21})$$

$$I_x = 2 \int_{A/2} y^2 \, dA = \int_A y^2 \, dA, \quad (\text{XIII.22})$$

где $W_{x,pl}$ — пластический момент сопротивления при изгибе;
 I_x — момент инерции сечения относительно нейтральной оси x .

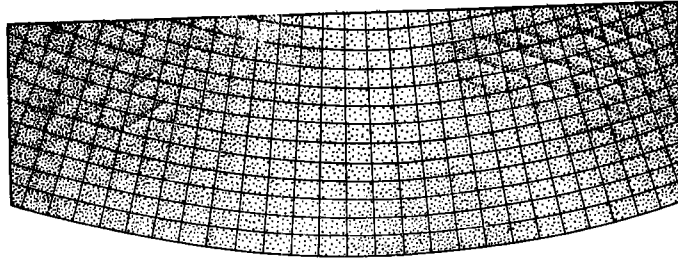


Рис. XIII.7

С учетом формул (XIII.21) и (XIII.22) из формулы (XIII.20) получим

$$\sigma_y W_{x,pl} + E_1 I_x / \rho = M, \quad (\text{XIII.23})$$

откуда

$$1/\rho = M / (E_1 I_x) - \sigma_y W_{x,pl} / (E_1 I_x). \quad (\text{XIII.24})$$

Подставляя значение $1/\rho$ из формулы (XIII.24) в формулу (XIII.18), получим

$$\sigma = \sigma_y + My / I_x - \sigma_y W_{x,pl} y / I_x. \quad (\text{XIII.25})$$

Для максимальных напряжений в крайних волокнах имеем

$$\sigma = \pm (\sigma_y + M / W_x - \sigma_y W_{x,pl} / W_x); \quad (\text{XIII.26})$$

при $\sigma_y = 0$ получим известную формулу линейного изгиба.

Предельный (разрушающий) момент получим из формулы (XIII.26) при напряжениях, равных пределу прочности:

$$M_u = W_x (\sigma_u - \sigma_y) + \sigma_y W_{x,pl}. \quad (\text{XIII.27})$$

при $\sigma_u = \sigma_y$ (идеальная пластичность) получаем формулу (XIII.14)

$$M_u = \sigma_y W_{x,pl}.$$

Пример XIII.1. Определить предельную нагрузку для балки прямоугольного сечения $b = 4,67$ см, $h = 10,07$ см. Балка изготовлена из мягкой стали, имеющей $\sigma_y = 212$ МПа, $\sigma_u = 430$ МПа, $\epsilon_u = 0,24$ (относительное удлинение при разрыве), $W_x = 78,6$ см³ $= 78,6 \cdot 10^{-6}$ м³, $W_{x, \rho l} = 118,4$ см³ $= 118,4 \cdot 10^{-6}$ м³. Длина балки $l = 0,7$ м, а $E_1 = (\sigma_u - \sigma_y) / \epsilon_u = (430 - 212) / 0,24 = 910$ МПа.

Решение. Разрушающий момент определяем по формуле (XIII.27)

$$M_u = 78,6 \cdot 10^{-6} (430 - 212) + 212 \cdot 118,4 \cdot 10^{-6} = 422 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Разрушающая нагрузка составляет

$$F_u = \frac{4M_u}{l} = 4 \cdot 422 \cdot 10^2 / 0,7 = 241 \cdot 10^3 \text{ Н} = 241 \text{ кН}.$$

В опытах испытание такой балки было прекращено при нагрузке 282 кН из-за чрезмерных деформаций.

Превышение фактической разрушающей нагрузки над расчетной объясняется тем, что в зоне упрочнения фактическая диаграмма $\sigma - \epsilon$ имеет выпуклость вверх и идет выше расчетной прямой линии BC (см. пункт на рис. XIII.6).

Если определять предельный момент без учета упрочнения, то получим

$$M_u = \sigma_y W_{x, \rho l} = 212 \cdot 118,4 \cdot 10^{-6} = 252 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Разрушающая нагрузка получилась бы равной

$$F_u = 4 \cdot 252 \cdot 10^2 / 0,7 = 144 \cdot 10^3 \text{ Н} = 144 \text{ кН},$$

что на 40 % меньше F_u , вычисленной с учетом упрочнения.

Как видим, влияние упрочнения на величину разрушающей нагрузки значительно.

§ 111. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О РАСЧЕТЕ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Изложенный в предыдущих главах метод расчета деталей носит название расчета по **допускаемым напряжениям**.

По этому методу расчет деталей на прочность и жесткость ведется на основе закона Гука.

За опасное состояние детали принимается такое, при котором напряжение хотя бы в одной (опасной) точке достигает предела текучести.

Прочность детали считается обеспеченной, если эксплуатационное (рабочее) напряжение в опасной точке не превосходит допускаемого:

$$\sigma \leq \sigma_{adm} = \sigma_y / n_{adm}, \quad (\text{XIII.28})$$

где n_{adm} — нормативный коэффициент запаса прочности.

Фактический коэффициент запаса прочности определяется как отношение предела текучести к фактическому напряжению:

$$n = \sigma_y / \sigma. \quad (\text{XIII.29})$$

Однако, как отмечалось ранее, пользуясь законом Гука, мы не в состоянии вычислить предельные нагрузки, которые может выдержать деталь к моменту разрушения или к моменту образования определенной пластической деформации.

Во многих случаях более правильно расчеты на прочность при действии статических нагрузок вести с учетом пластических деформаций, как показано в настоящей главе, и запас прочности вычислить как отношение предельной нагрузки F_u к рабочей (фактически действующей) F :

$$n = F_u / F. \quad (\text{XIII.29a})$$

Правильнее также при расчетах деталей пользоваться не одним коэффициентом запаса, а системой частных коэффициентов, учитывающих влияние основных факторов на прочность детали. Это позволяет более дифференцированно учитывать весьма разнообразные конкретные условия работы детали.

В связи с этим в последнее время все большее распространение получает метод расчета деталей по предельным состояниям, позволяющий в определенных случаях учитывать пластические деформации.

При расчете строительных конструкций метод расчета по предельным состояниям принят как обязательный с 1955 г. В машиностроении в связи с большим разнообразием условий нет такой строгой регламентации методов расчета. В настоящее время в машиностроении наибольшим распространением все еще пользуется метод расчета по упругим состояниям (по допускаемым напряжениям).

Однако и здесь начинает применяться метод расчета по предельным состояниям.

В качестве предельных состояний детали машины могут быть приняты:

1. Предельное состояние по несущей способности, которая характеризуется нагрузками, соответствующими предельным состояниям по прочности, устойчивости, выносливости, сопротивлению пластическим деформациям. Эти нагрузки могут быть силами F , моментами M , давлениями q и т. д.

2. Предельное состояние по деформациям и перемещениям, при достижении которого в детали, сохраняющей прочность и устойчивость, появляются такие деформации или колебания, которые делают невозможной дальнейшую эксплуатацию детали.

3. Предельное состояние по износу поверхностного слоя детали.

Каждое из этих предельных состояний характеризуется предельным условием, указывающим, что, для того чтобы была возможной безопасная эксплуатация, силы, действующие на деталь, должны быть меньше предельного значения, а в предельном состоянии равны этому значению.

Для первого предельного состояния это условие, называемое **условием неразрушимости**, имеет вид

$$N \leq N_u, \quad (\text{XIII.30})$$

где N — расчетное усилие в детали; N_u — предельное сопротивление детали, соответствующее моменту потери несущей способности.

Расчетное усилие в детали определяется как сумма усилий от каждой нормативной нагрузки с учетом соответствующих каждой нагрузке коэффициентов перегрузки n_i , больших единицы. Таким образом,

$$N = \sum N_n n_i. \quad (\text{XIII.31})$$

Предельное сопротивление детали N_u зависит от формы и размеров детали, сопротивления материала соответствующему виду деформации и условий работы, т. е.

$$N_u = n_2 n_3 \sigma_n A, \quad (\text{XIII.32})$$

где n_2 — коэффициент однородности материала; n_3 — коэффициент условий работы, учитывающий степень ответственности детали и другие особенности, не отражаемые в расчетах прямым путем; σ_n — нормативное сопротивление материала (для пластичных материалов — нормативное значение предела текучести, для хрупких материалов — нормативное значение предела прочности, при расчете на усталость — предел выносливости); A — геометрический фактор детали (площадь, момент сопротивления и т. д.).

При расчете на усталость предельное сопротивление должно включать соответствующие коэффициенты, уменьшающие несущую способность детали (коэффициент концентрации, масштабный коэффициент и т. д.).

Таким образом, в развернутом виде условие неразрушимости запишется так:

$$\sum N_n n_i = N \leq n_2 n_3 \sigma_n A. \quad (\text{XIII.33})$$

Для второго предельного состояния предельное условие имеет вид

$$\Delta \leq \Delta_u, \quad (\text{XIII.34})$$

где Δ — наибольшее перемещение сечения детали от рабочей нагрузки; Δ_a — предельное перемещение, определяющее необходимость прекращения эксплуатации детали (функция назначения детали).

Для более широкого применения метода расчета по предельным состояниям в машиностроении необходимо более детальное нормирование коэффициентов перегрузки, однородности, условий работы, предельной пластической деформации, предельного износа и т. д.

Это позволит при выборе размеров детали опираться не только на опыт и искусство конструктора, но и на объективные критерии и нормативы, что повысит надежность деталей и позволит сократить расход материала на их изготовление.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы расчета сооружений непрерывно развиваются, углубляясь и совершенствуясь.

В последние годы интенсивно разрабатываются вопросы динамики сооружений, методы расчета сооружений с учетом пластических свойств материала, методы расчета на устойчивость, вопросы применения вычислительных машин при расчетах сооружений, методы проектирования конструкций наименьшего веса и другие вопросы.

Особого внимания заслуживает принципиально новый метод расчета сооружений, который интенсивно разрабатывается в Советском Союзе (работы **Н. С. Стрелецкого**, **А. Р. Ржаницына**, **В. В. Болотина** и др.).

Этот метод условно может быть назван **вероятностно-статистическим** (или **статистическим**).

Основная идея этого метода состоит в следующем. Величины, входящие в уравнения прочности, жесткости и устойчивости, как-то: нагрузки, характеристики свойств материала, геометрические характеристики сечений, — рассматриваются не как величины постоянные, строго определенные, а как случайные величины (статистические совокупности), обладающие известной, иногда довольно значительной изменчивостью (рассеянием). Изучение таких величин возможно лишь на основе методов теории вероятностей.

Степень рассеяния той или иной величины характеризуется соответствующей кривой распределения.

В качестве примера на рис. I.6 была приведена кривая распределения ветровой нагрузки, а на рис. II.12 — кривая распределения предела текучести малоуглеродистой стали.

Даже такие, казалось бы, постоянные величины, как площадь сечения, момент сопротивления, момент инерции и просто линейные размеры детали, в действительности являются величинами статически переменными вследствие неизбежных погрешностей изготовления и измерения.

Кривые распределения могут строиться по опытным данным или в некоторых случаях чисто умозрительно по теоретическим законам, отвечающим существенным признакам данной статистической совокупности. По признакам **Пирсона**, **Колмогорова**, **Бернштейна** можно установить, что теоретическая кривая достаточно хорошо отвечает эмпирической.

Кривые распределения могут быть симметричными (см. рис. II.22) и несимметричными (см. рис. I.6)

Наиболее распространенной теоретической кривой, описывающей симметричное распределение, является **кривая Гаусса**, называемая также **нормальной кривой** (см. рис. II.22).

Для несимметричных законов распределения также возможно применение кривой Гаусса путем того или иного ее «исправления».

Сохранение закона Гаусса для описания несимметричных явлений желательно потому, что математические операции с этим законом наиболее просты, хорошо изучены и табулированы.

Имея кривые распределения исходных величин, можно по правилам теории вероятностей построить кривые распределения функций.

Например, имея кривую распределения для нагрузки и для площади сечения, можно построить кривую распределения нормального напряжения при центральном растяжении $\sigma = F/A$.

Если кривые распределения F и A имеют нормальный вид, то и кривая распределения σ также будет нормальной. Затем записывается условие прочности, которое в напряжениях имеет вид

$$\sigma < \sigma_u, \quad (\text{XIII.35})$$

где σ — расчетное напряжение; σ_u — предельное напряжение (для пластичных материалов предел текучести — σ_y).

При учете пластических деформаций напряжения заменяются усилиями

$$N < N_u. \quad (\text{XIII.36})$$

Вопрос о степени уменьшения расчетного напряжения по отношению к предельному решается в существующей методике допускаемых напряжений введением коэффициента запаса прочности n .

В статистическом методе признается, что уменьшение величин, стоящих в правой части выражений (XIII.35) или (XIII.36), в n раз не дает стопроцентной гарантии неразрушимости детали, так как кривые распределения не пересекают горизонтальной оси. Поэтому даже при значительном коэффициенте запаса всегда остается какая-то вероятность разрушения детали.

Задача состоит в том, чтобы уметь определять эту вероятность разрушения и в зависимости от назначения детали принимать то или иное значение в качестве допускаемого. Для этого необходимо построить кривую распределения функции прочности $D = N_u - N$ (или $\sigma_u - \sigma$). При нормальном виде функций распределения σ_u и σ кривая D также будет нормальной (рис. XIII.8).

По вертикальной оси отложены значения плотности вероятности распределения функции D , по горизонтальной — значения самой функции D . Площадь всей кривой равна единице. Положительные значения функции D соответствуют безопасным случаям нагружения, отрицательные значения соответствуют случаям разрушения детали или появлению недопустимых деформаций.

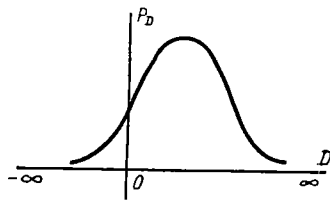


Рис. XIII.8

Вероятность Q разрушения детали характеризуется площадью кривой распределения функции в пределах от минус бесконечности до нуля:

$$Q = \int_{-\infty}^0 P_D dD. \quad (\text{XIII.37})$$

Вместо вероятности разрушения Q можно оперировать с вероятностью неразрушения P (**надежностью**), характеризуемой площадью положительной части кривой распределения функции прочности:

$$P = \int_0^{\infty} P_D dD = 1 - Q. \quad (\text{XIII.38})$$

Для вычисления интеграла (XIII.37) имеются таблицы. Вычисленная вероятность разрушения конструкции не должна превосходить некоторой малой величины, которую называют **допускаемой вероятностью разрушения конструкции**.

Допускаемая вероятность разрушения детали должна приниматься в зависимости от характера последствий, вызываемых разрушением детали.

Если разрушение детали может повлечь за собой человеческие жертвы, то вероятность разрушения должна приниматься весьма малой, практически равной нулю.

Исследования проф. Н. С. Стрелецкого показали, что для выполненных строительных конструкций вероятность разрушения колеблется в пределах $1 \cdot 10^{-5}$ — $1 \cdot 10^{-7}$, т. е. в среднем из 1 млн. сооружений может в любое время разрушиться одно.

В одном из проектов (1958 г.) норм расчета строительных сооружений для особо ответственных зданий и сооружений, если их выход из строя означает катастрофу, рекомендовалось принимать допускаемую вероятность разрушения $3 \cdot 10^{-6}$, т. е. допускалась возможность разрушения трех сооружений из 1 млн.

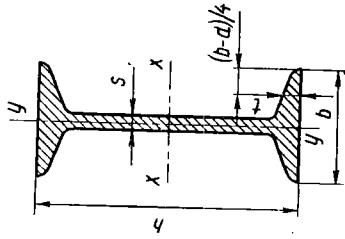
Если разрушение детали (конструкции) не влечет за собой человеческих жертв, а вызывает только необходимость ремонта

или замены этой детали, то допускаемая вероятность разрушения детали может быть определена из чисто экономических соображений, а именно из условия минимума суммарной стоимости детали (стоимости изготовления и стоимости ремонта).

Практическому применению статистического метода должна предшествовать обширная исследовательская работа по изучению кривых распределения нагрузок, характеристик прочности материала и других величин, влияющих на прочность конструкции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239—72, 8240—72, 8509—72* (СТ СЭВ 104—74); 8510—72 (СТ СЭВ 255—76)

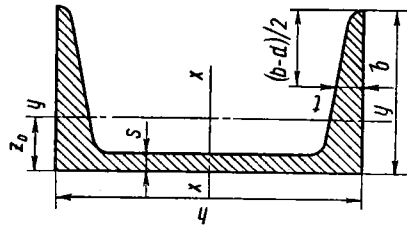


Двутавры

Номер балки	Размеры, мм			Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	s			x—x			y—y			
						I_{x1} , см ⁴	W_{x1} , см ³	i_{x1} , см	S_{x1} , см ³	I_{y1} , см ⁴	W_{y1} , см ³	i_{y1} , см
10	100	55	4,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55

Таблица 1

16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1 290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1 430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1 840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2 030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2 550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2 790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3 460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3 800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5 010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5 500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7 080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7 780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9 840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13 380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19 062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27 696	1 231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39 727	1 589,0	19,90	919,0	1 043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55 962	2 035,0	21,80	1 181,0	1 356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00	76 806	2 560,0	23,60	1 491,0	1 725,0	182,00	3,54



Швеллеры

Таблица 2

№ профилей	Масса I м, кг	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей						z ₀ , см
		h	b	s	t		x—x			y—y			
							V I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ⁴	ν I _y , см ⁴	W _y , см ³	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31

10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	29,6	31,2	8,0	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	5,42	54,1	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1 090	121	7,24	69,8	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1 190	132	7,32	76,1	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1 520	152	8,07	87,8	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1 670	167	8,15	95,9	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2 110	192	8,89	110	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2 330	212	8,90	121	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2 900	242	9,73	139	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3 180	265	9,84	151	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4 160	308	10,9	178	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5 810	387	12,0	224	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7 980	484	13,1	281	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10 200	601	14,2	350	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	444	642	73,4	3,23	2,75

3.2	3	32	1.86	1.46	1.77	0.97	2.80	1.23	0.74	0.63	3.26	0.89
	4		2.43	1.91	2.26	0.96	3.58	1.21	0.94	0.62	4.39	0.94
3.6	3	36	2.10	1.65	2.56	1.10	4.06	1.39	1.06	0.71	4.64	0.99
	4		2.75	2.16	3.29	1.09	5.21	1.38	1.36	0.70	6.24	1.04
4	3	40	2.35	1.85	3.55	1.23	5.63	1.55	1.47	0.79	6.35	1.09
	4		3.08	2.42	4.58	1.22	7.26	1.53	1.90	0.78	8.53	1.13
	5		3.79	2.97	5.53	1.20	8.75	1.54	2.30	0.79	10.73	1.17
4.5	3	45	2.65	2.08	5.13	1.39	8.13	1.75	2.12	0.89	9.04	1.21
	4		3.48	2.73	6.63	1.38	10.5	1.74	2.74	0.89	12.1	1.26
	5		4.29	3.37	8.03	1.37	12.7	1.72	3.33	0.88	15.3	1.30
5	3	50	2.96	2.32	7.11	1.55	11.3	1.95	2.95	1.00	12.4	1.33
	4		3.89	3.05	9.21	1.54	14.6	1.94	3.80	0.99	16.6	1.38
	5		4.80	3.77	11.2	1.53	17.8	1.92	4.63	0.98	20.9	1.42
5.6	4	56	4.38	3.44	13.1	1.73	20.8	2.18	5.41	1.11	23.3	1.52
	5		5.41	4.25	16.0	1.72	25.4	2.16	6.59	1.10	29.2	1.57
6.3	4	63	4.96	3.90	18.9	1.95	29.9	2.45	7.81	1.25	33.1	1.69
	5		6.13	4.81	23.1	1.94	36.6	2.44	9.52	1.25	41.5	1.74
	6		7.28	5.72	27.1	1.93	42.9	2.43	11.2	1.24	50.0	1.78
	4.5		6.20	4.87	29.0	2.16	46.0	2.72	12.0	1.39	51.0	1.88
	5		6.86	5.38	31.9	2.16	50.7	2.72	13.2	1.39	56.7	1.90

№ профилей	Размеры, мм		Площадь профиля, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей								z ₀ , см
					x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		
	b	d			I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x₀} , см ⁴	i _{x₀} , макс., см	I _{y₀} , см ⁴	i _{y₀} , мин., см	I _{x₁} , см ⁴	i _{x₁} , см	
7	70	6	8,15	6,39	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94		
		7	9,42	7,39	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99		
		8	10,7	8,37	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,0	2,02		
7,5	75	5	7,39	5,80	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02		
		6	8,78	6,89	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06		
		7	10,1	7,96	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10		
		8	11,5	9,02	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15		
		9	12,8	10,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18		
8	80	5,5	8,63	6,78	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17		
		6	9,38	7,36	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19		
		7	10,8	8,51	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23		
		8	12,3	9,65	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27		
9	90	6	10,6	8,33	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43		
		7	12,3	9,64	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47		
		8	13,9	10,9	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51		
		9	15,6	12,2	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55		

10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94*	472	2,99
16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06		
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70		

Продолжение табл. 3

№ профилей	Размеры, мм		Площадь профиля, см ²	Масса l , м, кг	Справочные величины для осей									
					$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1		Z_0 , см	
					I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} max, см ⁴	i_{x_0} max, см	I_{y_0} min, см ⁴	i_{y_0} min, см	I_{x_1} , см ⁴			
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	2 128	4,85		
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	2 324	4,89		
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	3 182	5,37		
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	3 452	5,42		
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	3 722	5,46		
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	4 264	5,54		
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4 560	7,72	1 182	3,93	5 355	5,70		
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5 494	7,63	1 438	3,91	6 733	5,89		
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4 470	8,60	1 159	4,38	4 941	5,93		
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5 045	8,58	1 306	4,36	5 661	6,02		
25	250	16	78,4	61,5	4717	7,76	7 492	9,78	1 942	4,98	8 286	6,75		
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8 337	9,75	2 158	4,96	9 342	6,83		
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9 160	9,72	2 370	4,94	10 401	6,91		
		22	106,1	83,3	6270	7,69	9 961	9,69	2 579	4,93	11 464	7,00		
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11 125	9,64	2 887	4,91	13 064	7,11		
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12 244	9,59	3 190	4,89	14 674	7,23		
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12 965	9,56	3 389	4,89	15 753	7,31		

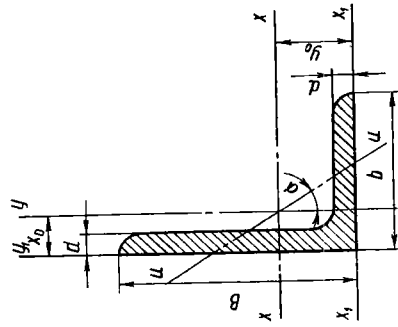


Таблица 4

Уголки неравнобокие

№ профилей	Размеры, мм		Масса 1 м, кг	Площадь профилей, см ²	Справочные величины для осей										Угол наклона на α , град	
					x-x		y-y		x ₁ -x ₁		y ₁ -y ₁		u-u			
					I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	I_{xy} , см ⁴	i_x , см	i_y , см	i_{xy} , см	I_{x_1} , см ⁴	I_{y_1} , см ⁴	Расстояние от центра тяжести до x_0 , см	Расстояние от центра тяжести до y_0 , см		
2,5/1,6	25	16	0,91	1,16	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392		
3,2/2	32	20	1,17	1,49	1,52	1,01	0,46	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382		
		4	1,52	1,94												

№ профилей	Размеры, мм			Площадь профиля, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей												Угол наклона на α , °
	B	b	d			x—y			y ₁ —y ₁			x ₁ —x ₁			y—z			
						I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_1} , см ⁴	Расстояние от центра тяжести y_0 , см	I_{y_1} , см ⁴	i_{y_1} , см	I_{y_1} , см ⁴	Расстояние от центра тяжести x_0 , см	I_z , см ⁴	i_z , см	I_u , см ⁴	i_u , см	
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385		
						3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381		
4,5/2,8	45	28	3	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382		
						5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379		
5/3,2	50	32	3	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403		
						7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401		
5,6/3,6	56	36	4	3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406		
						13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404		
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397		
			5	4,98	3,91	19,9	2,0	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,37	0,86	0,396		
			6	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393		
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386		
7/4,5	70	45	5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	0,98	0,406			

7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,7	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409

№ профилей	Размеры, мм		Площадь, см ²	Масса I м, кг	Справочные величины для осей												Угол накло- на осей I _g α		
					x—x			y—y			x ₁ —x ₁			y ₁ —y ₁				и—и	
					I _x , см ⁴	i _x , см	I _y , см ⁴	i _y , см	I _{x₁} , см ⁴	Расстоя- ние от цен- тра тяжести до y ₀ , см	I _{y₁} , мин, см ⁴	Расстоя- ние от цен- тра тяжести до x ₀ , см	I _x , мин, см ⁴	и—и	I _y , мин, см ⁴	и—и		i _и , мин, см	
16/10	160	100	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1 221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391				
			25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1 359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390				
			30	23,6	784	5,11	239	2,82	1 634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388				
			34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1 910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385				
18/11	180	10	22,2	952	5,8	276	3,12	1 933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375					
		12	26,4	1 123	5,77	324	3,10	2 324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374					
20/12,5	200	11	27,4	1 449	6,45	446	3,58	2 920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392					
		12	29,7	1 568	6,43	482	3,57	3 189	6,54	786	2,83	286	2,74	0,392					
		14	34,4	1 801	6,41	551	3,54	3 726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390					
		16	39,1	2 026	6,38	617	3,52	4 264	6,71	1 061	2,99	367	2,72	0,388					
25/16	250	12	37,9	3 147	8,07	1 032	4,62	6 212	7,97	1 634	3,53	604	3,54	0,410					
		16	49,9	4 091	8,02	1 333	4,58	8 308	8,14	2 200	3,69	781	3,50	0,408					
		18	55,8	4 545	7,99	1 475	4,56	9 358	8,23	2 487	3,77	866	3,49	0,407					
		20	61,7	4 987	7,97	1 613	4,53	10 410	8,31	2 776	3,85	949	3,48	0,405					

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М., 1986.
2. *Смирнов А. Ф. и др.* Сопротивление материалов. М., 1979.
3. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. М., 1976.
4. *Беляев Н. М.* Сборник задач по сопротивлению материалов. М., 1965
5. *Беляев Н. М.* Лабораторные работы по сопротивлению материалов. М., 1954.
6. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М., 1979.
7. *Писаренко Г. С. и др.* Сопротивление материалов. Киев, 1963.
8. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. М., 1960, ч. I; 1965, ч. II.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда цикла напряжений 254
Анизотропия, см. материал анизотропный
- Балка** 115
— вспомогательная 158
— двутавровая 152, 291
— двухопорная 134
— двухпролетная 202
— консольная 200
— ломаная 145
— неразрезная 199
— переменного сечения 219
— рациональной формы 215
— статически неопределимая 197
— статически определимая 133
Бетти теорема 180
Брус 6
- Вал** 92
— рациональной формы 126
— статически неопределимый 126
Верещагина правило 184
Вероятность разрушения 340
Взаимность касательных напряжений 55
— перемещений, см. Максвелла теорема
— работ, см. Бетти теорема
Вязкость ударная 297
- Гибкость стержня** 270
- Гипотеза наибольших деформаций 228
— нормальных напряжений 226
— плоских сечений 23
— энергии формоизменения 231
Гипотезы прочности 221
Гука закон 24, 79
— — обобщенный 60
— — при сдвиге 84
- Даламбера принцип** 237
Демпфирование 251
Депланация 101
Деформации сложные (сложное сопротивление) 195
Деформация главная 61
— динамическая 239
— изгиба, см. кривизна оси балки
— кручения 98
— линейная 13
— малая 5
— объемная 61
— остаточная (пластическая) 14
— ползучести 38
— поперечная 25
— сдвига 84
— температурная 74
— угловая 13
— упругая 14
— упругого последдействия 39
— динамическая 239
— идеально-пластичного материала 324
— перемещений 24, 26, 99

- пластмасс 42
- пределов выносливости 257
- предельных напряжений 257
- растяжения стали 30
- сжатия 41
- Диаграмма частотная 46
- Динамика в сопротивлении материалов 237
- Дислокация 37
- Длина, приведенная при продольном изгибе 268

- Жаростойкость 41
- Железобетон предварительно напряженный 77
- Жесткость при изгибе 168
 - — кручения 118
- Журавского теорема 138
 - формула 156

- Зазоры температурные 75
- Заклепки 86
- Закон Гука, см. Гука закон
 - Ньютона, см. Ньютона закон
 - парности касательных напряжений 55
 - сохранения энергии 66

- Изгиб 132
 - косой 132
 - пластический 329
 - пластический с упрочнением 331
 - плоский 132
 - поперечный 132
 - продольно-поперечный 278
 - продольный 264
 - с кручением, см. кручение с изгибом
 - с растяжением (сжатием) 245
 - чистый 132
- Изотропия, см. материал изотропный

- Интеграл Мора, см. Мора интеграл
- Испытание материалов 30, 296
 - — на выносливость 310, 311
 - — ударной нагрузкой 296

- Колебания вынужденные 299
 - свободные 298
- Концентрация напряжений
 - — при изгибе 161
 - — — кручении 128
 - — — циклических нагрузках 314
- Коэффициент асимметрии цикла 309
 - влияния абсолютных размеров сечения 316
 - динамический 288
 - запаса прочности (коэффициент безопасности) 42
 - устойчивости 265
 - качества поверхности 317
 - концентрация напряжений 315
 - однородности материала 49, 336
 - перегрузки 336
 - поперечной деформации 25
 - приведения длины 268
 - уменьшения допускаемого напряжения при продольном изгибе 271
 - чувствительность материала 316
- Кривая распределения, см. диаграмма частотная
- Кривизна оси балки 164
- Критерии прочности 221
- Кручение бруса круглого сечения 109
 - — некруглого сечения 121
 - пружин 250
 - с изгибом 253
 - с растяжением 256

- стесненное 123
- тонкостенных стержней 123

- Лапласа формула** 261
- Линии Чернова — Людерса** 33
- Линия нейтральная** 147
 - нулевая 147
 - силовая 147

- Материал анизотропный** 9
 - изотропный 9
 - однородный 9
 - пластичный 35
 - слабо пластичный 35
 - хрупкий 35
- Метод расчета по предельным состояниям** 323
 - сечений 15
 - сил 203
 - статистический 338
- Модуль продольной упругости (модуль упругости I рода)** 24
 - сдвига (модуль упругости II рода) 84
- Момент изгибающий** 136
 - инерции главных 101
 - — кольца 98
 - — круга 98
 - крутящий 16
 - — осевой 95
 - пластический (сопротивления) 328, 330
 - — полярный 95
 - предельный 330, 333
 - — прямоугольника 97
 - — сечений 95
 - сопротивления осевой 151
 - статический 93
 - — треугольника 98
 - — центральный 97
 - — центробежный 96
- Мора гипотеза прочности** 232
 - интеграл 185

- Нагрузка динамическая** 287
 - допускаемая 51
 - повторно-периодическая 12, 306
 - предельная 327
 - распределенная 11
 - сосредоточенная 11
 - статическая 11
 - ударная 289
- Надежность** 340
- Наклеп** 37
- Напряжение** 18
 - главное 57, 20
 - допускаемое 21
 - касательное 20
 - контактные 78
- Напряжение критическое при сжатии** 270
 - монтажное 75, 76
 - номинальное 78
 - нормальное 18, 19
 - приведенное (эквивалентное) 21, 229
 - при изгибе 147, 148, 149
 - температурное 74
- Неизвестное лишнее** 67, 68
- Неопределимость статическая** 67, 68
- Непрерывность материала** 9

- Оболочка** 8
- Образцы нормальные для испытаний** 27
- Опоры балки** 133
- Ось бруса** 8
 - инерции главная 94
 - — центральная 94, 101
 - — нейтральная 147

- Перемещение** 27, 28
 - при изгибе линейное, см. прогиб балки
 - — изгибе угловое, см. угол поворота сечения балки

- Пластика 6
 Пластичность 14, 15
 Пластмассы 42
 Площадки главные 47
 Ползучесть 38
 Последствие упругое 39
 Построение эпюр крутящих моментов 109
 Правило Верещагина, см. Верещагина правило
 Предел выносливости (усталости) 311
 — пропорциональности 32
 — прочности 33
 — текучести 32
 — упругости 32
 Принцип наименьшей работы 67
 — независимости действия сил 10
 — Сен-Венана, см. Сен-Венана принцип
 Прогиб балки
 — — динамический 291
 — — статический 164
 Прочность 4
 Пружины 250
 Пуассона коэффициент, см. коэффициент поперечной деформации

 Работа внешних сил 63
 — внутренних сил 64
 Равновесие безразличное 264
 — неустойчивое 264
 — устойчивое 264
 Радиус инерции 248
 Растяжение 22
 — внецентренное 247
 — в двух направлениях 56
 — в одном направлении 53, 54
 — с кручением, см. кручение с растяжением
 Расчет по допускаемым напряжениям 21, 334
 — по предельным состояниям, см. метод расчета по предельным состояниям
 Реакция балок 134
 Резонанс 303
 Релаксация 39
 Ритца метод 283

 Связь лишняя 197, 198
 Сдвиг 83
 — чистый 83
 Свойства энергии 65
 Сен-Венана принцип 10
 Сечение рациональное 215
 Сжатие внецентренное 247
 — гибких стержней, см. изгиб продольный
 Сила инерции 287
 — критическая 265
 — поперечная 16, 136
 — продольная 16
 Система канонических уравнений метода сил 203, 204
 — основная 68
 Слой нейтральный 147
 Сопротивление временное, см. предел прочности
 — сложное, см. деформации сложные
 Состояние двухосное 20, 21
 — линейное 21
 — напряженное 20
 — пластичное 35
 — трехосное 20
 — хрупкое 35
 Сосуды тонкостенные 259, 260
 Стержень 6
 — ломаный 145
 — некруглого сечения 121
 — тонкостенный 120

 Тело абсолютно твердое 4
 — деформируемое 4
 — изотропное, см. материал изотропный

- массивное 6
- однородное, см. материал однородный
- Тензомер 4
- Теорема Бетти, см. Бетти теорема
- Журавского, см. Журавского теорема
- Точка опасная 237

- Угол закручивания допускаемый относительный** 117
 - — относительный 117
 - поворота сечения балки 164
 - — полный 117
 - сдвига 14, 84
- Удар центральный** 289
 - внецентренный 292
 - поперечный 291
- Удлинение** 14
 - истинное при разрыве 33, 34
 - остаточное при разрыве 33, 34
- Укорочение** 14
 - динамическое 290, 291
- Универсальные уравнения** 168
- Упрочнение** 34, 35
 - поверхностное 317
- Упругость** 14, 15
- Уравнение изогнутой оси** 164, 165
- Уравнения канонические** 204
 - нулевой линии 147, 242
- Усилие внутреннее** 14
 - начальное 9
 - при изгибе 147
- Условие прочности** 21
 - — при внецентренном сжатии 248
 - — — изгибе 151
 - — — изгибе с растяжением 246
- Условие прочности при косом изгибе** 241, 242
 - — — кручении 115
 - — — кручении с изгибом 254, 255
 - — — растяжении (сжатии) 50
 - — — сдвиге 89
- Устойчивость** 264

- Формула Журавского, см. Журавского формула**
- Формула Лапласа, см. Лапласа формула**

- Центр изгиба** 160
- Цикл напряжений** 308
 - отнулевой 309
 - симметричный 309

- Эйлера формула** 267
- Эксцентриситет** 247
- Энергия деформации потенциальная** 65
 - — — при изгибе 163
 - — — кручении 120
 - — — сдвиге 85
 - — — удельная 65
- Энергетический метод определения критических нагрузок** 281

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Баландин П. П. 233
Безухов Н. И. 8
Бернштейн С. Н. 338
Бернулли Я. 8
Бетти Е. 180
Болотин В. В. 8
Бубнов И. Г. 8

Верещагин А. К. 184
Власов В. З. 8

Галилей Г. 7
Гаусс Е. Ф. 339
Головин Х. С. 8
Григолюк Э. И. 8
Гук Р. 8

Давиденков Н. Н. 8, 233
Даламбер Ж. Л. 287
Динник А. Н. 8
Дирихле П. Г. 282

Журавский Д. И. 8

Ильюшин А. А. 8

Кинасошвили Р. С. 313
Колмогоров А. Н. 338
Коши О. Л. 8
Крылов А. Н. 8

Лагранж Ж. 282
Ламэ Г.Т. 8
Лаплас П. С. 261

Максвелл Д. К. 184
Мор О. 184, 231

Пирсон К. 338
Пономарев С. Д. 8
Пуассон С. Д. 25

Работнов Ю. Н. 8
Ржаницын А. Р. 8, 338

Сен-Венан Б. 8, 10
Серенсен С. В. 314
Смирнов А. Ф. 8, 338
Стрелецкий Н. С. 338

Тимошенко С. П. 8
Трапезин И. И. 3, 8

Феодосьев В. И. 8
Филоненко-Бородич М. М. 233
Фридман Я. Б. 233

Эйлер Л. 8, 267
Ясинский Ф. С. 271

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Глава I

Основные положения

§ 1. Задачи курса	4
§ 2. Допущения	8
§ 3. Внешние силы (нагрузки)	11
§ 4. Деформации и перемещения	14
§ 5. Метод сечений	15
§ 6. Напряжения	18

Глава II

Растяжение и сжатие

§ 7. Определение внутренних усилий	22
§ 8. Определение напряжений	23
§ 9. Определение деформаций и перемещений	24
§ 10. Опытное изучение свойств материалов	30
§ 11. Коэффициент запаса прочности. Выбор допускаемых напряжений	47
§ 12. Основные типы задач при расчете на прочность растянутых (сжатых) стержней	50
§ 13. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении (сжатии) в одном направлении	53
§ 14. Закон парности касательных напряжений	55
§ 15. Определение напряжений в наклонных сечениях при растяжении (сжатии) в двух направлениях	56
§ 16. Определение главных напряжений и положения главных площадок	57
§ 17. Зависимость между деформациями и напряжениями при плоском и объемном напряженных состояниях (обобщенный закон Гука)	60
§ 18. Работа внешних и внутренних сил при растяжении (сжатии). Потенциальная энергия деформации	63
§ 19. Свойства механической энергии	65
§ 20. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии	67
§ 21. Температурные и монтажные напряжения. Искусственное регулирование усилий в конструкциях	74
§ 22. Концентрация напряжений. Контактные напряжения	78

Глава III

Сдвиг

§ 23. Основные понятия	83
§ 24. Напряженное состояние и деформации при чистом сдвиге	83
§ 25. Потенциальная энергия при сдвиге. Зависимость между тремя упругими постоянными E , G и ν	85
§ 26. Практические расчеты на сдвиг	86

Глава IV

Геометрические характеристики сечения

§ 27. Статический момент сечения	93
§ 28. Моменты инерции сечения	95
§ 29. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей	97
§ 30. Моменты инерции простых сечений	97
§ 31. Моменты инерции сложных фигур	99
§ 32. Изменение моментов инерции при повороте осей	99
§ 33. Главные оси инерции и главные моменты инерции	101
§ 34. Зависимость между центробежными моментами инерции относительно двух систем параллельных осей	103

Глава V

Кручение

§ 35. Построение эпюр крутящих моментов	109
§ 36. Определение напряжений в стержнях круглого сечения	112
§ 37. Деформации и перемещения при кручении валов	117
§ 38. Построение эпюр угловых перемещений при кручении	118
§ 39. Потенциальная энергия при кручении	120
§ 40. Основные результаты теории кручения стержней некруглого сечения	121
§ 41. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля	123
§ 42. Статически неопределимые задачи	126
§ 43. Концентрация напряжений	128
§ 44. Рациональные формы сечений при кручении	129
	363

Изгиб. Определение напряжений

§ 45. Общие понятия о деформации изгиба	132
§ 46. Типы опор балок	133
§ 47. Определение опорных реакций	134
§ 48. Определение внутренних усилий при изгибе	135
§ 49. Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил	136
§ 50. Зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки	137
§ 51. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил	138
§ 52. Определение нормальных напряжений	146
§ 53. Условия прочности по нормальным напряжениям	151
§ 54. Определение касательных напряжений	153
§ 55. Напряжения в наклонных сечениях балки. Главные напряжения	160
§ 56. Концентрация напряжений при изгибе	161
§ 57. Потенциальная энергия деформации при изгибе	162

Изгиб. Определение перемещений

§ 58. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки	164
§ 59. Определение перемещений при нескольких участках нагружения и переменной жесткости балок. Универсальные уравнения	168
§ 60. Примеры определения перемещений при изгибе графоаналитическим методом и по универсальным уравнениям	172
§ 61. Теорема о взаимности работ. Теорема о взаимности перемещений	180
§ 62. Определение перемещений методом Мора. Правило Верещагина	197
§ 63. Расчет статически неопределимых балок	197
§ 64. Примеры расчета статически неопределимых балок	200
§ 65. Основы общего метода расчета статически неопределимых систем (основы метода сил)	203
§ 66. Рациональное размещение опор балок	212
§ 67. Рациональные формы сечения балок	215

Глава VIII

Гипотезы пластичности и разрушения (гипотезы прочности)

§ 68. Назначение гипотез прочности	221
§ 69. Первая гипотеза прочности	226
§ 70. Вторая и третья гипотезы прочности	228
§ 71. Энергетические гипотезы прочности	230
§ 72. Краткие сведения о других гипотезах прочности	231

Глава IX

Общий случай действия сил на стержень (сложное сопротивление)

§ 73. Основные понятия	236
§ 74. Примеры построения эпюр внутренних усилий для стержня с ломаной осью	237
§ 75. Изгиб в двух плоскостях (косой изгиб)	239
§ 76. Изгиб с растяжением (сжатием)	245
§ 77. Внецентренное сжатие (растяжение)	247
§ 78. Кручение и срез. Расчет пружин с небольшим шагом витка	250
§ 79. Кручение с изгибом	253
§ 80. Кручение с растяжением (сжатием)	256
§ 81. Пример расчета вала на изгиб с кручением	258
§ 82. Расчет тонкостенных сосудов	259

Глава X

Расчет сжатых стержней на устойчивость (продольный изгиб)

§ 83. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия	264
§ 84. Формула Эйлера для критической силы	266
§ 85. Влияние способа закрепления концов стержня на критическую силу	268
§ 86. Пределы применимости формулы Эйлера	269
§ 87. Эмпирические формулы для определения критических напряжений	271
§ 88. Практическая формула для расчета на устойчивость	271
§ 89. Рациональные формы сечений сжатых стержней	273
§ 90. Продольно-поперечный изгиб	276
§ 91. Энергетический метод определения критических нагрузок	281

Глава XI

Динамическое действие нагрузок

§ 92. Динамические нагрузки	287
§ 93. Вычисление напряжений при равноускоренном движении	288
§ 94. Определение перемещений и напряжений при ударе	289
§ 95. Внецентренный удар	292
§ 96. Испытания материалов ударной нагрузкой (ударная проба)	296
§ 97. Свободные колебания системы с одной степенью свободы	298
§ 98. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы. Резонанс	302

Глава XII

Расчет на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени (расчет на усталость)

§ 99. Основные определения	306
§ 100. Кривая усталости при симметричном цикле. Предел выносливости	310
§ 101. Диаграммы предельных напряжений и амплитуд цикла	311
§ 102. Факторы, влияющие на предел выносливости	314
§ 103. Определение коэффициента запаса прочности при симметричном цикле	318
§ 104. Определение коэффициента запаса прочности при асимметричном цикле напряжений	318
§ 105. Практические меры повышения сопротивления усталости	320

Глава XIII

Сопротивление материалов пластическим деформациям

§ 106. Расчетные модели упругопластичного материала	323
§ 107. Расчет статически неопределимых систем, работающих на растяжение — сжатие, с учетом пластичности материала	325
§ 108. Пластическое кручение стержня круглого сечения	327
§ 109. Пластический изгиб статически определимых балок	329
§ 110. Пластический изгиб с учетом упрочнения материала	331
§ 111. Основные понятия о расчете по предельным состояниям	334

Заключение	338
Приложения	342
Список литературы	355
Предметный указатель	356
Именной указатель	361

Учебное издание

Петр Андреевич Степин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Зав. редакцией *А. В. Дубровский*
Редактор *Л. Н. Чупеева*
Мл. редактор *Н. М. Иванова*
Художественный редактор *Л. К. Громова*
Технический редактор *А. К. Нестерова*
Корректор *Г. А. Четкина*

ИБ № 6593

Изд. № ОТ-620. Сдано в набор 25.09.87. Подп. в печать 11.11.87.
Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать
высокая. Объем 19,32 усл. печ. л. 19,32 усл. кр.-отт. 19 уч.-изд. л.
Тираж 60 000 экз. Зак. № 591. Цена 95 коп.
Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглин-
ная ул., д. 29/14.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный
Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.